



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Lösningsförslag till tentamen
Måndag den 20 december 2021

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. (a) Bestäm den lösning till ekvationen

$$y' + 2xy = 0, \quad y = y(x),$$

som uppfyller $y(0) = 1$.

- (b) Ekvationen

$$(2xy^2 - 3) + (2x^2y + 4)y' = 0, \quad y = y(x),$$

är exakt. Bestäm den lösning som uppfyller $y(1) = 1$. Lösningen får ges på implicit form.

(4 p)

Lösningsförslag.

- (a) Ekvationen är linjär och kan lösas genom att multiplicera med den integrerande faktorn $e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$. Detta ger

$$0 = e^{x^2} y' + 2x e^{x^2} y = (e^{x^2} y)'$$

vilket integreras till

$$e^{x^2} y = C$$

eller

$$y = C e^{-x^2}$$

där C är en konstant. Initialvillkoret $y(0) = 1$ ger nu $C = 1$, så lösningen är

$$y = e^{-x^2}.$$

- (b) Ekvationen kan skrivas som

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

där $M(x, y) = 2xy^2 - 3$ och $N(x, y) = 2x^2y + 4$. Vi bestämmer en potentialfunktion $\psi(x, y)$ så att

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M = 2xy^2 - 3, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N = 2x^2y + 4.$$

När vi integrerar den första av dessa ekvationer får vi

$$\psi(x, y) = x^2 y^2 - 3x + f(y)$$

där $f(y)$ är en funktion av y . Insatt i andra ekvationen ger detta

$$2x^2y + f'(y) = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2x^2y + 4$$

1

vilket är uppfyllt om $f'(y) = 4$, eller om $f(y) = 4y$. En potentialfunktion är alltså

$$\psi(x, y) = x^2 y^2 - 3x + 4y.$$

Ekvationen vi ska lösa kan alltså skrivas som

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' = 0.$$

Låt $y = y(x)$ ges implicit av ekvationen

$$\psi(x, y) = x^2 y^2 - 3x + 4y = C.$$

Då ger kedjeregeln att

$$0 = \frac{d}{dx}(C) = \frac{d}{dx}(\psi(x, y)) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y',$$

så denna funktion $y(x)$ är en lösning till vår differentialekvation. Initalvillkoret $y(1) = 1$ ger att

$$1 - 3 + 4 = C,$$

så $C = 2$ och lösningen ges implicit av ekvationen

$$x^2 y^2 - 3x + 4y = 2.$$

Fortsättning. Det är möjligt att lösa ut y ur denna ekvation. Ekvationen är

$$x^2 y^2 + 4y = 2 + 3x$$

och kvadratkomplettering ger

$$\left(xy + \frac{2}{x}\right)^2 = 2 + 3x + \frac{4}{x^2}$$

eller

$$xy = -\frac{2}{x} \pm \sqrt{2 + 3x + \frac{4}{x^2}} = -\frac{2}{x} + \sqrt{2 + 3x + \frac{4}{x^2}}$$

eller

$$y(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \sqrt{2 + 3x + \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{x^2} \left(-2 + \sqrt{2x^2 + 3x^3 + 4}\right).$$

□

2. Bestäm den lösning till systemet

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = 4x(t) + y(t) \end{cases}$$

som uppfyller $x(0) = 0, y(0) = 1$.

(4 p)

Lösningsförslag. Med $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ kan vi skriva systemet på matrisform som

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

där matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. För att hitta lösningen bestämmer vi egenvärden och egenvektorer till $\mathbf{A}$. Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(\mathbf{A} - rI) = \det \begin{pmatrix} 1-r & -4 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix} = (1-r)^2 + 16,$$

och har lösningarna $r = 1 \pm 4i$. En egenvektor ξ till egenvärdet $r = 1 + 4i$ uppfyller

$$\mathbf{0} = (\mathbf{A} - rI)\xi = \begin{pmatrix} 1 - (1+4i) & -4 \\ 4 & 1 - (1+4i) \end{pmatrix} \xi = \begin{pmatrix} -4i & -4 \\ 4 & -4i \end{pmatrix} \xi = 4 \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \xi,$$

vilket till exempel har lösningen $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. En komplexvärd lösning till systemet är alltså

$$\begin{aligned} e^{rt}\xi &= e^{(1+4i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t (\cos(4t) + i\sin(4t)) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^t \left(\cos(4t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(4t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + ie^t \left(\cos(4t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sin(4t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^t \begin{pmatrix} \cos(4t) \\ \sin(4t) \end{pmatrix} + ie^t \begin{pmatrix} -\sin(4t) \\ \cos(4t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Real- och imaginärdel av denna lösning är två linjärt oberoende reellvärda lösningar till ekvationen,

$$\mathbf{x}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(4t) \\ \sin(4t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^t \begin{pmatrix} -\sin(4t) \\ \cos(4t) \end{pmatrix},$$

och den allmänna lösningen är

$$\mathbf{x}_c(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) = e^t \left(c_1 \begin{pmatrix} \cos(4t) \\ \sin(4t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin(4t) \\ \cos(4t) \end{pmatrix} \right).$$

Initialvillkoret $x(0) = 0, y(0) = 1$, är uppfyllt om

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

det vill säga om $c_1 = 0, c_2 = 1$. Den sökta lösningen är alltså

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} -\sin(4t) \\ \cos(4t) \end{pmatrix}.$$

□

3. Ekvationen

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0, \quad x > 0$$

har två lösningar $y_1(x) = x$ och $y_2(x) = x^{-1}$. Använd metoden med variation av parametrar för hitta den allmänna lösningen till ekvationen

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 2x^2 e^{-x}.$$

(4 p)

Lösningsförslag. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

För variation av parametrar gör vi ansatsen

$$y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = u_1(x)x + u_2(x)x^{-1}.$$

Derivatan av detta är

$$y' = u_1'x + u_2'x^{-1} + u_1 - u_2x^{-2}.$$

Vi antar att

$$u_1'x + u_2'x^{-1} = 0$$

så att

$$y' = u_1 - u_2x^{-2}.$$

Detta ger

$$y'' = u_1' - u_2'x^{-2} + 2u_2x^{-3}.$$

Insatt i ekvationen får vi

$$\begin{aligned} 2x^2 e^{-x} &= x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) \\ &= x^2 (u_1' - u_2'x^{-2} + 2u_2x^{-3}) + x(u_1 - u_2x^{-2}) - (u_1x + u_2x^{-1}) \\ &= u_1'x^2 - u_2'. \end{aligned}$$

Funktionerna $u_1(x), u_2(x)$ ska alltså uppfylla

$$\begin{cases} u_1'x^2 - u_2' &= 2x^2 e^{-x} \\ u_1'x + u_2'x^{-1} &= 0 \end{cases},$$

eller

$$\begin{cases} u_1'x^2 - u_2' &= 2x^2 e^{-x} \\ u_1'x^2 + u_2' &= 0 \end{cases}.$$

Vi löser ut $u_1'(x), u_2'(x)$ och får

$$u_1' = e^{-x}, \quad u_2' = -x^2 e^{-x}.$$

Detta integreras till

$$u_1(x) = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + c_1$$

och (med partiell integration två gånger)

$$\begin{aligned} u_2(x) &= -\int x^2 e^{-x} dx = -x^2(-e^{-x}) + \int 2x(-e^{-x}) dx = x^2 e^{-x} - \int 2xe^{-x} dx \\ &= x^2 e^{-x} - 2x(-e^{-x}) + \int 2(-e^{-x}) dx = x^2 e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{-x} + c_2 \\ &= (x^2 + 2x + 2)e^{-x} + c_2. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till ekvationen är alltså

$$\begin{aligned}y(x) &= u_1(x)x + u_2(x)x^{-1} \\&= (-e^{-x} + c_1)x + ((x^2 + 2x + 2)e^{-x} + c_2)\frac{1}{x} \\&= 2e^{-x}\left(1 + \frac{1}{x}\right) + c_1x + c_2x^{-1}.\end{aligned}$$

□

4. Systemet

$$\begin{cases} x' = -2xy \\ y' = y - x + xy - y^3 \end{cases}$$

för $(x, y) = (x(t), y(t))$ har tre kritiska punkter och konstanta lösningar

$$(x(t), y(t)) = (0, 0), \quad (0, 1), \quad (0, -1).$$

Förklara vad det betyder att en kritisk punkt är (asymptotiskt) stabil respektive instabil. Använd metoden med linjärisering för att avgöra om dessa kritiska punkter är stabila eller instabila, i de fall det går. **(4 p)**

Lösningsförslag. För definitionerna av (asymptotisk) stabilitet respektive instabilitet för en kritisk punkt, se Avsnitt 9.2 i kursboken.

Det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = F(x, y) = -2xy \\ y' = G(x, y) = y - x + xy - y^3 \end{cases}$$

har Jacobimatrix

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{pmatrix} \partial F / \partial x & \partial F / \partial y \\ \partial G / \partial x & \partial G / \partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -1 + y & 1 + x - 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Vid en kritisk punkt (x_0, y_0) approximeras högerledet i systemet med det linjära systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

där

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}(x_0, y_0).$$

I punkten $(0, 0)$ har vi

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denna matrix har determinant noll. Motsvarande linjära system har alltså inte en isolerad kritisk punkt i origo och kan inte ge en meningsfull approximation av det icke-linjära systemet.

I punkten $(0, 1)$ är

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}(0, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

med egenvärden $-2, -2$. Kritiska punkten i origo för det linjära systemet är en asymptotiskt stabil nod. Enligt resultat om linjärisering (Sats 9.3.3) har det icke-linjära systemet en stabil kritisk punkt i punkten $(0, 1)$.

Slutligen har vi i punkten $(0, -1)$ att

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}(0, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

med egenvärden $2, -2$. I detta fall har det linjära systemet en instabil sadelpunkt i origo. Enligt satsen om linjärisering drar vi slutsatsen att det icke-linjära systemet har en instabil kritisk punkt i punkten $(0, -1)$.

□

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

5. Visa att ekvationen

$$2xy'' - y' + 2y = 0$$

för $y = y(x)$ har en reguljär singulär punkt vid $x = 0$. Bestäm två linjärt oberoende serielösningar vid $x = 0$ till ekvationen. För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i dessa serielösningar, samt beräkna minst tre termer i vardera serie. För vilka x konvergerar dessa serier? **(4 p)**

Lösningförslag. Eftersom koefficienten $2x$ framför högsta derivatan y'' har $2x = 0$ vid $x = 0$ är punkten $x = 0$ en singulär punkt. För att undersöka om det är en reguljär singulär punkt skriver vi om ekvationen som

$$y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{x}y = 0$$

och multiplicerar med x^2 ,

$$x^2y'' + x\left(-\frac{x}{2}\right)y' + (x)y = 0.$$

Då koefficienterna i parenteser här,

$$-\frac{x}{2} \quad \text{och} \quad x,$$

båda är reguljära vid $x = 0$ är det en reguljär singulär punkt.

För att hitta serielösningar till ekvationen gör vi ansatsen

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n},$$

där r är ett reellt tal, och vi antar att den första koefficienten $a_0 \neq 0$. Då är

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n-1} \quad \text{och} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n-2}.$$

Insatt i ekvationen ger detta

$$\begin{aligned} 0 &= 2xy'' - y' + 2y \\ &= 2x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n-2} \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n-1} \right) + 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{r+n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1}x^{r+n-1} \\ &= 2a_0r(r-1)x^{r-1} - a_0rx^{r-1} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1}x^{r+n-1} \\ &= a_0(2r(r-1) - r)x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n(r+n)(r+n-1) - a_n(r+n) + 2a_{n-1})x^{r+n-1} \\ &= a_0(2r^2 - 3r)x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} ((r+n)(2r+2n-3)a_n + 2a_{n-1})x^{r+n-1}. \end{aligned}$$

Eftersom $a_0 \neq 0$ måste r uppfylla indicialekvationen

$$0 = 2r^2 - 3r = 2r \left(r - \frac{3}{2} \right).$$

Vi får två lösningar

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{3}{2}.$$

Koefficienterna a_n bestäms sedan av

$$(r+n)(2r+2n-3)a_n + 2a_{n-1} = 0,$$

eller

$$a_n = -\frac{2}{(r+n)(2r+2n-3)}a_{n-1}$$

för $n \geq 1$.

För $r = 0$ får vi att

$$a_n = -\frac{2}{n(2n-3)}a_{n-1}$$

för $n \geq 1$. Med $a_0 = 1$ är de första koefficienterna

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = \frac{4}{9}, \quad \dots$$

och vi har en lösning $y_1(x)$ med

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^0 \left(1 + 2x - 2x^2 + \frac{4}{9}x^3 + \dots \right) \\ &= 1 + 2x - 2x^2 + \frac{4}{9}x^3 + \dots \end{aligned}$$

För $r = 3/2$ har vi

$$a_n = -\frac{2}{n(2n+3)}a_{n-1}$$

för $n \geq 1$. Med $a_0 = 1$ får vi i detta fall

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{2}{5}, \quad a_2 = \frac{2}{35}, \quad a_3 = -\frac{4}{27 \cdot 35} = -\frac{4}{945}, \quad \dots$$

och en lösning $y_2(x)$ med

$$y_2(x) = x^{3/2} \left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{2}{35}x^2 - \frac{4}{945}x^3 + \dots \right).$$

För att undersöka konvergensen för dessa serier använder vi kvottestet. Vi kan göra detta samtidigt för båda fallen $r_1 = 0$ och $r_2 = 3/2$. För

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

beräknar vi

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n x^{r+n}}{a_{n-1} x^{r+n-1}} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{2}{(r+n)(2r+2n-3)} \right| = 0.$$

Detta gäller för alla x sådana att termerna i serierna är meningsfulla. Eftersom $Q < 1$ så konvergerar alltså serierna för alla sådana x . För $r_1 = 0$ är termerna x^n väldefinierade alla x , medan för $r_2 = 3/2$ är termerna $x^{3/2+n}$ meningsfulla bara för $x \geq 0$. Serien för $y_1(x)$ konvergerar alltså för alla x , medan serien för $y_2(x)$ konvergerar för alla x där den är definierad, alltså för $x \geq 0$. $\square$

6. Denna uppgift gäller lösningar till den andra ordningens linjära homogena differentialekvationen

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0 \quad (1)$$

där $p(t), q(t)$ är kontinuerliga funktioner definierade på ett intervall I . Om $y_1(t), y_2(t)$ är lösningar till (1) så definieras deras Wronskian som funktionen

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}.$$

- (a) Formulera existens- och entydighetssatsen för lösningar till (1). Visa med hjälp av denna att alla lösningar till (1) ges av

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

för olika val av c_1, c_2 om och endast om $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$ för något $t_0 \in I$.

- (b) Visa att om $y_1(t), y_2(t)$ är lösningar till (1) så är antingen $W[y_1, y_2](t) = 0$ för alla $t \in I$ eller $W[y_1, y_2](t) \neq 0$ för alla $t \in I$.

(4 p)

Lösningsförslag.

- (a) Se kursboken Sats 3.2.1 och Sats 3.2.4.
(b) Se kursboken Sats 3.2.7.

□