



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Tentamen
Tisdag den 26 oktober 2021

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de fyra första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 16 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Lös följande initialvärdesproblem och bestäm lösningarnas existensintervall.

(a) $(1 - t^2)y' + 4ty = 9t(1 - t^2)^{-1}$, $y(2) = 4$.

(b) $y' = (1 + y^2)t$, $y(0) = 1$.

(4 p)

2. För vilka värden på parametern $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, har initialvärdesproblemet

$$9y''(t) + a^2y(t) = \sin(2t), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0,$$

en obegränsad lösning? Bestäm lösningarna i dessa fall.

(4 p)

3. Hitta den allmänna lösningen till det homogena systemet

$$t\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad t > 0,$$

1

genom en ansats av typen $\mathbf{x}(t) = t^r \xi$, där r är ett tal och ξ är en vektor. Motivera varför du har hittat den allmänna lösningen till systemet. Lös därefter initialvärdesproblemet

$$t\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(\pi) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(4 p)

4. Utslagsvinkeln θ för en viss pendel uppfyller differentialekvationen

$$\theta''(t) = -10 \sin \theta(t) - 2\theta'(t), \quad t \geq 0.$$

Sätt $\psi(t) = \theta'(t)$ och hitta ett första ordningens system

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \psi \end{pmatrix}' = \mathbf{f} \begin{pmatrix} \theta \\ \psi \end{pmatrix}$$

för $(\theta(t), \psi(t))$. Vilka punkter i $\theta\psi$ -planet svarar mot lösningar där pendeln står still? Bestäm linjäriseringen till systemet i dessa punkter. Vilken typ av lösningar har de linjäriserade systemen? Hur beter sig lösningar till pendelekvationen med initialvillkor $(\theta(0), \theta'(0)) = (\theta(0), \psi(0))$ nära dessa punkter?

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

5. Differentialekvationen

$$(x^2 + 4)y'' - 6y = 0, \quad y = y(x),$$

har två lösningar y_1, y_2 som uppfyller $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ respektive $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$. Bestäm dessa lösningar på serieform vid $x = 0$,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna a_n samt beräkna termer till minst ordning 3 i vardera serie. Hur stor är konvergensradien för de två serierna?

(4 p)

6. Denna uppgift gäller entydighet för lösningar $y = y(t)$ till initialvärdesproblemet

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (1)$$

där $f(t, y)$ är en kontinuerlig funktion definierad på något område R i ty -planet som innehåller punkten (t_0, y_0) .

- (a) Ge ett exempel på ett initialvärdesproblem som (1) med två olika funktioner som lösningar. Ge en noggrann förklaring varför de funktioner du anger är lösningar.
 (b) Antag nu att funktionen $f(t, y)$ i (1) dessutom uppfyller ett Lipschitz-villkor i y , alltså att det finns en konstant $C > 0$ så att

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C|y_1 - y_2|$$

för alla $(t, y_1), (t, y_2)$ i området R . Visa att om $\phi(t)$ och $\psi(t)$ båda löser problemet (1) så är $\phi(t) = \psi(t)$.

(4 p)