

TENTAMEN TEORETISK FYSIK SI1155

Måndag 2023-05-29 kl 08:00-13:00

Skriv på varje sida	Namn och problemnummer
Motivera noga	Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag
Hjälpmedel	BETA, miniräknare, linjal, formelblad på skrivningens sida 3-5
Poängsättning	6 poäng per problem
Examinator	Mats Wallin tel 073 765 2000

1. En partikel är i en oändlig endimensionell lådpotential som ges av

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 < x < a \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

Vågfunktionen vid tiden $t = 0$ är

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x) + e^{i\phi}\psi_2(x))$$

där $\psi_n(x) = \sqrt{2/a} \sin(n\pi x/a)$ är energieigenfunktioner och ϕ är en konstant.

- (a) Bestäm väntevärdet av energin vid tiden t .
- (b) Efter en tid $t_0 > 0$ återvänder vågfunktionen till värdet vid tiden $t = 0$. Bestäm t_0 .
- (c) Om en mätning av energin vid tiden t ger resultatet $\frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$, vad blir vågfunktionen direkt efter mätningen?

2. En partikelstråle med energi $E > V_0 > 0$ skickas i x-riktningen och träffar potentialen

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < 0 \\ V_0 & \text{om } x > 0 \end{cases}$$

Beräkna transmissionssannolikheten $T = |j_{\text{trans}}/j_{\text{in}}|$ och reflektionssannolikheten $R = |j_{\text{refl}}/j_{\text{in}}|$ om strålen infaller mot potentialen från

- (a) negativa x-axeln.
- (b) positiva x-axeln.

VÄND!

3. En partikel i en endimensionell harmonisk oscillatorpotential $V^0(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ störs av potentialen $V(x) = \frac{1}{2}m\Omega^2x^2$ där Ω är den störande kraftens vinkelfrekvens.

(a) Beräkna första och andra ordningens korrekationer till grundtillståndsenenergin.

(b) Lös problemet exakt och jämför med lösningen i (a).

4. En elektron och en proton är i spinttillstånden $S_x = +\hbar/2$ för elektronspinnets $\mathbf{S}^{(e)}$ och $S_y = -\hbar/2$ för protonspinnets $\mathbf{S}^{(p)}$. Ange möjliga värden som kan fås vid mätningar av S^2 och S_z för det totala spinnets $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(e)} + \mathbf{S}^{(p)}$, samt sannolikheten att få dessa värden.

5. En partikel är bunden av en endimensionell deltafunktionspotential $V = -\alpha\delta(x)$ där $\alpha > 0$. Det bundna tillståndet ges av det kända uttrycket från föreläsningen:

$$\Psi(x) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2}$$

Vid en viss tidpunkt påverkas partikeln av en kraft som ger partikeln rörelsemängden $p = \hbar k$. Beräkna sannolikheten att partikeln stannar kvar i det bundna tillståndet $\Psi(x)$, samt sannolikheten att partikeln lämnar det bundna tillståndet.

Ledning: börja med att analysera uttrycket $e^{ikx}\Psi(x)$.

LYCKA TILL!

Lösningar

1. En partikel är i en oändlig endimensionell lådpotential som ges av

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 < x < a \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

Vågfunktionen vid tiden $t = 0$ är

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x) + e^{i\phi}\psi_2(x))$$

där $\psi_n(x) = \sqrt{2/a} \sin(n\pi x/a)$ är energieigenfunktioner och ϕ är en konstant.

(a) Bestäm väntevärdet av energin vid tiden t .

(b) Efter en tid $t_0 > 0$ återvänder vågfunktionen till värdet vid tiden $t = 0$. Bestäm t_0 .

(c) Om en mätning av energin vid tiden t ger resultatet $\frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$, vad blir vågfunktionen direkt efter mätningen?

(a)

$$\langle E \rangle = E_1|c_1|^2 + E_2|c_2|^2 = \frac{1}{2}(E_1 + E_2) = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(1 + 2^2) = \frac{5\hbar^2\pi^2}{4ma^2}$$

(b) Tillståndet vid tiden t är

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x)e^{-i\omega_1 t} + e^{i\phi}\psi_2(x)e^{-i\omega_2 t})$$

där $E_n = \hbar\omega_n$. $\Psi(x, t_0) = \Psi(x, 0)$ ger

$$e^{-i\omega_1 t_0} = e^{-i\omega_2 t_0} = 1$$

dvs $\omega_1 t_0$ och $\omega_2 t_0$ behöver vara multipler av 2π . Det minsta sådana värdet på t_0 ges av

$$\omega_1 t_0 = 2\pi \Rightarrow t_0 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\hbar\pi^2/(2ma^2)} = \frac{4ma^2}{\hbar\pi}$$

(c) Energin är första exciterade nivån med $n = 2$. Efter mätningen kollapsar vågfunktionen därför till motsvarande egenfunktion:

$$\Psi = \psi_2$$

2. En partikelstråle med energi $E > V_0 > 0$ skickas i x-riktningen och träffar potentialen

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < 0 \\ V_0 & \text{om } x > 0 \end{cases}$$

Beräkna transmissionssannolikheten $T = |j_{\text{trans}}/j_{\text{in}}|$ och reflektionssannolikheten $R = |j_{\text{refl}}/j_{\text{in}}|$ om strålen infaller mot potentialen från

(a) negativa x-axeln.

(b) positiva x-axeln.

(a) Lösning till tidsoberoende Schrödingerekvationen:

$$x < 0 : \Psi = \Psi_{\text{in}} + \Psi_{\text{refl}} = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$x > 0 : \Psi = \Psi_{\text{trans}} Fe^{ik'x}$$

där

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} + V_0$$

Kontinuitetsvillkor:

$$\Psi(0) = A + B = F$$

$$\Psi'(0) = ik(A - B) = ik'F$$

Eliminera F :

$$k(A - B) = k'(A + B)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{k + k'}{k - k'}$$

Detta ger

$$R = \left| \frac{j_{\text{refl}}}{j_{\text{in}}} \right| = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left(\frac{k - k'}{k + k'} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - V_0/E}}{1 + \sqrt{1 - V_0/E}} \right)^2$$

Notera att $R = 0$ för $V_0 = 0$. OK.

Eliminera B :

$$2kA = (k + k')F$$

$$\frac{F}{A} = \frac{2k}{k + k'}$$

Detta ger

$$T = \left| \frac{j_{\text{trans}}}{j_{\text{in}}} \right| = \left| \frac{k'}{k} \right| \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \frac{k'}{k} \left(\frac{2k}{k + k'} \right)^2 = \frac{4kk'}{(k + k')^2} = \frac{4\sqrt{1 - V_0/E}}{(1 + \sqrt{1 - V_0/E})^2}$$

Notera att $T = 1$ för $V_0 = 0$.

Kontroll:

$$T + R = \frac{4kk'}{(k + k')^2} + \left(\frac{k - k'}{k + k'} \right)^2 = \frac{4kk' + k^2 + k'^2 - 2kk'}{(k + k')^2} = 1$$

OK.

SVAR:

$$T = \frac{4kk'}{(k+k')^2} = \frac{4\sqrt{1-V_0/E}}{(1+\sqrt{1-V_0/E})^2}, \quad R = \left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2 = \left(\frac{1-\sqrt{1-V_0/E}}{1+\sqrt{1-V_0/E}}\right)^2$$

(b) Använd symmetrin i problemet och avläs lösningen direkt genom att ta $V_0 \rightarrow -V_0$ och $E \rightarrow E + V_0$. Då blir lösningen samma som i (a) men k och k' byter formel med varandra: $k \sim \sqrt{E - V_0}$, $k' \sim \sqrt{E}$. T, R ges av samma formler som i (a). Märkligt nog får T, R samma värden om strålen kommer från höger eller vänster.

SVAR: Samma som i (a).

3. En partikel i en endimensionell harmonisk oscillatorpotential $V^0(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ störs av potentialen $V(x) = \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2$ där Ω är den störande kraftens vinkelfrekvens.

(a) Beräkna första och andra ordningens korrekationer till grundtillståndsenergien.

(b) Lös problemet exakt och jämför med lösningen i (a).

(a) Första ordningens korrektion:

$$E_0^1 = \langle 0|V|0\rangle = \frac{1}{2}m\Omega^2 \langle 0|x^2|0\rangle = \frac{1}{2}m\Omega^2 \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0|(a^\dagger + a)^2|0\rangle = \frac{1}{2}m\Omega^2 \frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{\hbar\Omega^2}{4\omega}$$

mha

$$\langle 0|(a^\dagger + a)^2|0\rangle = \langle 0|a^\dagger a + \underbrace{aa^\dagger}_{=a^\dagger a+1}|0\rangle = \langle 0|2N+1|0\rangle = 1$$

där $[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1$ och $N = a^\dagger a$.

Andra ordningens korrektion:

$$E_0^2 = \sum_{n>0} \frac{|\langle n|V|0\rangle|^2}{E_0 - E_n} = \left(\frac{1}{2}m\Omega^2 \frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \sum_{n>0} \frac{|\langle n|(a^\dagger + a)^2|0\rangle|^2}{E_0 - E_n}$$

För $n > 0$ blir

$$\langle n|(a^\dagger + a)^2|0\rangle = \langle n|(a^\dagger)^2|0\rangle = \sqrt{2}\delta_{n,2}$$

och $E_0 - E_2 = -2\hbar\omega$. Detta ger

$$E_0^2 = \left(\frac{1}{2}m\Omega^2 \frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \frac{2}{-2\hbar\omega} = -\frac{\hbar\Omega^4}{16\omega^3}$$

(b) Exakt lösning:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega'^2 x^2$$

där $(\omega')^2 = \omega^2 + \Omega^2$. Detta ger:

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega' = (n + 1/2)\hbar\omega\sqrt{1 + (\Omega/\omega)^2}$$

Taylorutveckling: $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + \dots$ ger

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega \left(1 + \frac{1}{2}(\Omega/\omega)^2 - \frac{1}{8}(\Omega/\omega)^4 + \dots \right)$$

För $n = 0$ blir

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\Omega^2}{4\omega} - \frac{\hbar\Omega^4}{16\omega^3} + \dots$$

Detta stämmer med resultaten i (a).

4. En elektron och en proton är i spinttillstånd $S_x = +\hbar/2$ för elektronspinn $\mathbf{S}^{(e)}$ och $S_y = -\hbar/2$ för protonspinn $\mathbf{S}^{(p)}$. Ange möjliga värden som kan fås vid mätningar av S^2 och S_z för det totala spinn $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(e)} + \mathbf{S}^{(p)}$, samt sannolikheten att få dessa värden.

Skriv om spinnen i S_z -basen:

$$\uparrow_x = \frac{\uparrow + \downarrow}{\sqrt{2}}, \quad \downarrow_y = \frac{\uparrow - i\downarrow}{\sqrt{2}}$$

Detta ger:

$$\begin{aligned} \uparrow_x \downarrow_y &= \frac{\uparrow + \downarrow}{\sqrt{2}} \frac{\uparrow - i\downarrow}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} (\uparrow\uparrow - i\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow - i\downarrow\downarrow) \end{aligned}$$

Skriv om till totala spinnbasen:

$$\begin{aligned} |10\rangle &= \frac{\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}}, \quad |00\rangle = \frac{\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}} \Rightarrow \\ \uparrow\downarrow &= \frac{|10\rangle + |00\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \downarrow\uparrow = \frac{|10\rangle - |00\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned} \uparrow_x \downarrow_y &= \frac{1}{2} \left(|11\rangle - i \frac{|10\rangle + |00\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|10\rangle - |00\rangle}{\sqrt{2}} - i|1, -1\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(|11\rangle + \frac{1-i}{\sqrt{2}} |10\rangle - i|1, -1\rangle - \frac{1+i}{\sqrt{2}} |00\rangle \right) \end{aligned}$$

Kontroll:

$$|c_{11}|^2 + |c_{10}|^2 + |c_{1,-1}|^2 + |c_{00}|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left| \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right|^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left| -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right|^2 = 1$$

OK.

Möjliga mätvärden på S^2 och S_z är egenvärdena $s(s+1)\hbar^2$ och $m\hbar$. Mätvärden och motsvarande sannolikheter:

$s = 1$ kan fås både med $m = 0, \pm 1$ och sannolikheterna adderas:

$$S^2 = 2\hbar^2 \text{ fås med sannolikhet } P(s=1) = |c_{11}|^2 + |c_{10}|^2 + |c_{1,-1}|^2 = 1/2^2 + 1/2^2 + 1/2^2 = 3/4$$

$$s = 0: S^2 = 0 \text{ fås med sannolikhet } P(s=0) = |c_{00}|^2 = 1/4.$$

$$m = 1: S_z = \hbar \text{ fås med sannolikhet } P(m=1) = |c_{11}|^2 = 1/4$$

$$m = -1: S_z = -\hbar \text{ fås med sannolikhet } P(m=-1) = |c_{1,-1}|^2 = 1/4$$

$m = 0$ kan fås både med $s = 1$ och $s = 0$ och sannolikheterna adderas:

$$S_z = 0 \text{ fås med sannolikhet } P(m=0) = |c_{10}|^2 + |c_{00}|^2 = 1/4 + 1/4 = 1/2$$

5. En partikel är bunden av en endimensionell deltafunktionspotential $V = -\alpha\delta(x)$ där $\alpha > 0$. Det bundna tillståndet ges av det kända uttrycket från föreläsningen:

$$\Psi(x) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x|/\hbar^2}$$

Vid en viss tidpunkt påverkas partikeln av en kraft som ger partikeln rörelsemängden $p = \hbar k$. Beräkna sannolikheten att partikeln stannar kvar i det bundna tillståndet $\Psi(x)$, samt sannolikheten att partikeln lämnar det bundna tillståndet.

Ledning: börja med att analysera uttrycket $e^{ikx}\Psi(x)$.

Steg 1: Visa först att tillståndet ges rörelsemängden $p = \hbar k$ genom att multiplicera med e^{ikx} så att det nya tillståndet blir $\Psi_{\text{ny}}(x) = e^{ikx}\Psi(x)$. Då blir

$$\hat{p}\Psi_{\text{ny}} = \hat{p}(e^{ikx}\Psi) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}(e^{ikx}\Psi) = \hbar k e^{ikx}\Psi + \frac{\hbar}{i} e^{ikx}\Psi'$$

där $\Psi' = \partial\Psi/\partial x$. Detta ger

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ikx}\Psi)^* \hat{p}(e^{ikx}\Psi) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hbar k |\Psi|^2 dx + \underbrace{\frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)\Psi'(x) dx}_{=0} = \hbar k$$

pga normering. Den andra integralen blir noll eftersom Ψ är reell och jämn och Ψ' är udda.

Steg 2: Utveckla det nya tillståndet Ψ_{ny} i energiegentillstånden till det ursprungliga problemet. Sannolikheten att hitta det ursprungliga tillståndet Ψ , dvs att en energimätning hittar det bundna tillståndets energivärde, är expansionskoefficientens absolutbelopp i kvadrat:

$$P_0 = |\langle \Psi_{\text{ny}} | \Psi \rangle|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} |\Psi(x)|^2 dx \right|^2 = \frac{a^2}{4} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-a|x|} dx \right|^2$$

där $a = 2m\alpha/\hbar^2$. Imaginärdelen av $e^{-ikx} = \cos(kx) - i\sin(kx)$ är udda och integrerar till noll. Beräkna realdelen mha $2\cos(kx) = e^{ikx} + e^{-ikx}$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-a|x|} dx &= \int_0^{\infty} 2\cos(kx) e^{-a|x|} dx = \int_0^{\infty} (e^{ikx} + e^{-ikx}) e^{-ax} dx \\ &= \int_0^{\infty} (e^{-(a+ik)x} + e^{-(a-ik)x}) dx = \frac{1}{a+ik} + \frac{1}{a-ik} = \frac{2a}{a^2+k^2} \end{aligned}$$

Detta ger sannolikheten att hitta partikeln i det bundna tillståndet till

$$P_0 = \frac{a^2}{4} \frac{4a^2}{(a^2+k^2)^2} = \frac{1}{(1+(k/a)^2)^2} = \frac{1}{(1+(p/(2m\alpha/\hbar))^2)^2}$$

där $p = \hbar k$.

Kontroll: $p = 0$ ger $P_0 = 1$. OK.

Sannolikheten att lämna det bundna tillståndet blir

$$P_1 = 1 - P_0$$