

Tentamen del 2

Numeriska metoder SF1544 och BE3003

8.00-11.00 5:e juni 2018

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas bara om Del 1 i denna tentamen eller kontrollskrivningen den 1/3 2018 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng.

Det finns två alternativa uppgifter 2; bara en av dem får lämnas in.

1. Givet följande tabell

t	0	1	2
y	0	1	1/2

vill man hitta det styckvis kvadratiske polynomet $p(t)$ på formen

$$p(t) = \begin{cases} a_0 + a_1t + a_2t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ b_0 + b_1t + b_2t^2, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

som interpolerar punkterna i tabellen, är kontinuerlig och har kontinuerlig derivata i $(t, y) = (1, 1)$, samt uppfyller att

$$\int_1^2 p(t) dt = \frac{5}{2}.$$

- a.(10p) Ställ upp det ekvationssystem som ger koefficienterna för polynomet $p(t)$. Du behöver inte lösa ekvationssystemet för hand.
- b.(5p) Skriv ett Matlab program som beräknar koefficienterna och ritar upp polynomet $p(t)$.

1a. Låt

$$p(t) = \begin{cases} a_0 + a_1t + a_2t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ b_0 + b_1t + b_2t^2, & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

så

$$p'(t) = \begin{cases} a_1 + 2a_2t, & 0 \leq t \leq 1 \\ b_1 + 2b_2t, & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

och

$$\int_1^2 p(t) dt = b_0 + b_1 \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^2 + b_2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^2 = b_0 + \frac{3}{2}b_1 + \frac{7}{3}b_2.$$

Vi har villkoren

$$\begin{aligned} p(0) &= 0, \\ p(1) &= 1, \\ p(2) &= \frac{1}{2}, \\ \lim_{t \rightarrow 1-} p'(t) &= \lim_{t \rightarrow 1+} p'(t), \\ \int_1^2 p(t) dt &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

som ger ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

1b. Ett exempel på Matlabkod är

```
A=[1 0 0 0 0 0;
    1 1 1 0 0 0;
    0 0 0 1 1 1;
    0 0 0 1 2 4;
    0 1 2 0 -1 -2;
    0 0 0 1 3/2 7/3];
b=[0; 1; 1; 1/2; 0; 5/2];
x=A\b;
N=100; % antal punkter
y=zeros(N+1,1);
t=zeros(N+1,1);
dt=2/N;
for n=1:N+1
    T=(n-1)*dt;
    t(n)=T;
    if(t(n)<1)
        y(n)=x(1)+T*x(2)+T*T*x(3);
    else
        y(n)=x(4)+T*x(5)+T*T*x(6);
    end
end
plot(t,y)
```

2. Antag att vi söker en approximation av derivatan av en funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ som har begränsade derivator av ordning två, men vi har bara tillgång till värden $\tilde{f}(x) = f(x) + \eta(x)$, $x \in [0, 1]$, där $\eta(x)$ är ett osäkert mätfel som är begränsat enligt $\max_{x \in [0, 1]} |\eta(x)| \leq \epsilon$ för något $\epsilon > 0$, och η är ej deriverbar.

2a. (10p) Beskriv hur approximationen

$$(1) \quad \frac{\tilde{f}(\frac{1}{2} + \Delta x) - \tilde{f}(\frac{1}{2})}{\Delta x}$$

kan användas för att uppskatta $f'(\frac{1}{2})$ och ge en feluppskattning i termer av Δx och ϵ .

2b. (5p) Avgör hur Δx ska väljas i (1) för att felet i approximationen av $f'(\frac{1}{2})$ ska bli så litet som möjligt. Hur stort blir detta fel?

2a. Eftersom f har begränsade derivator av andra ordningen gäller

$$f'(\frac{1}{2}) = \frac{f(\frac{1}{2} + \Delta x) - f(\frac{1}{2})}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x).$$

Sambanden $f = \tilde{f} + \eta$ och $|\eta| < \epsilon$ ger feluppskattningen

$$\begin{aligned} f'(\frac{1}{2}) &= \frac{\tilde{f}(\frac{1}{2} + \Delta x) - \tilde{f}(\frac{1}{2})}{\Delta x} + \frac{\eta(\frac{1}{2} + \Delta x) - \eta(\frac{1}{2})}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \\ &= \frac{\tilde{f}(\frac{1}{2} + \Delta x) - \tilde{f}(\frac{1}{2})}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x + \frac{\epsilon}{\Delta x}). \end{aligned}$$

2b. Vi ska minimera $\Delta x + \frac{\epsilon}{\Delta x} =: g(\Delta x)$ med avseende på Δx . Vi har $g'(\Delta x) = 1 - \epsilon/(\Delta x)^2$ och $g''(\Delta x) = 2\epsilon/(\Delta x)^3 > 0$. Eftersom andraderivatan är positiv har vi ett minimum för $1 - \epsilon/(\Delta x)^2 = 0$, som ger $\Delta x = \sqrt{\epsilon}$ och felet $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$.

Alternativ uppgift 2. (15p) Formulera och bevisa en sats om konditionstal för lösning av linjära ekvationsystem.

3a. (10p) Anta att $a \in (0, 1)$ och betrakta fixpunktiterationerna

$$y_{n+1} = y_n(a - y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

där $0 < y_0 < a/2$. Bestäm gränsvärdet $y_* = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ och en uppskattning för hur felet $|y_n - y_*|$ beror på n när $n \rightarrow \infty$.

3b. (10p) Denna uppgift handlar om vad som kan hända i uppgift 3a när $a = 1$ genom att studera fixpunktiterationerna

$$x_0 = \frac{1}{10},$$

$$x_{n+1} = x_n - x_n^{\alpha+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

där $\alpha > 0$ är en positiv parameter. Visa att $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ och härled också en uppskattning hur felet $|x_n - \lim_{m \rightarrow \infty} x_m|$ beror på n när $n \rightarrow \infty$.

3a. Fixpunkten y_* löser $y_* = y_*(a - y_*)$ vilket ger $y_*(1 - a + y_*) = 0$ och vi får $y_* = 0$ eller $y_* = a - 1$.

Om $a > y_0 > 0$ får vi $a \geq y_m \geq 0$ för alla m ty antag $a \geq y_n \geq 0$ för något n . Då gäller

$$y_{n+1} = y_n(a - y_n) \geq 0,$$

eftersom $y_n \geq 0$ och $a - y_n \geq 0$, samt

$$a - y_{n+1} = a - y_n(a - y_n) = a - ay_n + y_n^2 \geq a(1 - y_n) \geq 0.$$

så $y_{n+1} \leq a$. D.v.s. $0 \leq y_{n+1} \leq a$ vilket med induktion visar att $0 \leq y_m \leq a$ för alla positiva heltal m . Den enda fixpunkten som följderna kan konvergera mot är då $y_* = 0$.

Låt $g(y) = y(a - y)$. Då blir $g'(y) = a - 2y$ och $\max_{0 \leq y \leq a} |g'(y)| = \max_{0 \leq y \leq a} |a - 2y| = a < 1$.

Vi får för något $\xi \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |y_{n+1} - y_*| &= |g(y_n) - g(y_*)| \\ &= |g'(\xi)(y_n - y_*)| \\ &\leq a|y_n - y_*| \\ &\leq a^{n+1}|y_0 - y_*|. \end{aligned}$$

Svar: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ och $0 \leq y_n \leq a^n y_0$.

3b. Vi har

$$(2) \quad \frac{x_{n+1} - x_n}{-x_n^{\alpha+1}} = 1.$$

Detta ger

$$N = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x_{n+1} - x_n}{-x_n^{\alpha+1}}$$

och

$$\int_{x_{N-1}}^{x_0} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} < \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x_{n+1} - x_n}{-x_n^{\alpha+1}} < \int_{x_N}^{x_1} \frac{dx}{x^{\alpha+1}}$$

eftersom $1/x^{\alpha+1}$ är avtagande för $x > 0$. Vi får

$$\int_b^a \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \left[\frac{-1}{\alpha x^\alpha} \right]_b^a = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{b^\alpha} - \frac{1}{a^\alpha} \right)$$

så

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{x_{N-1}^\alpha} - \frac{1}{x_0^\alpha} \right) < \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x_{n+1} - x_n}{-x_n^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{x_N^\alpha} - \frac{1}{x_1^\alpha} \right).$$

Detta ger med (2)

$$\frac{1}{x_{N-1}^\alpha} - \frac{1}{x_0^\alpha} < \alpha N < \frac{1}{x_N^\alpha} - \frac{1}{x_1^\alpha}$$

vilket medför att

$$\frac{1}{(\alpha(N+1) + x_0^{-\alpha})^{1/\alpha}} < x_N < \frac{1}{(\alpha N + x_1^{-\alpha})^{1/\alpha}}.$$

Vi ser att $\lim_{N \rightarrow \infty} x_N = 0$ och $0 < x_N < \frac{1}{(\alpha N)^{1/\alpha}}$. Vi har därför en algebraisk konvergensfart som är långsammare än den exponentiella i uppgift 3a.