

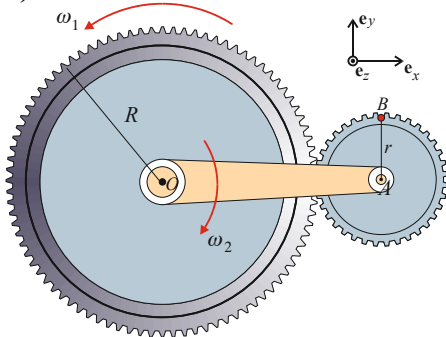
## Tentamen i SG1113 Mekanik, fortsättningskurskurs

**Obs! Inga hjälpmedel förutom skrivdon: papper, penna, linjaler, passare. Varje uppgift ger högst 6 poäng.**

### Problem (TEN B)

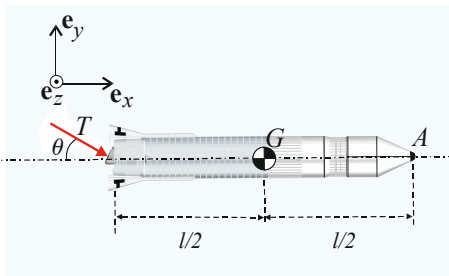
*Lycka till!*

1)



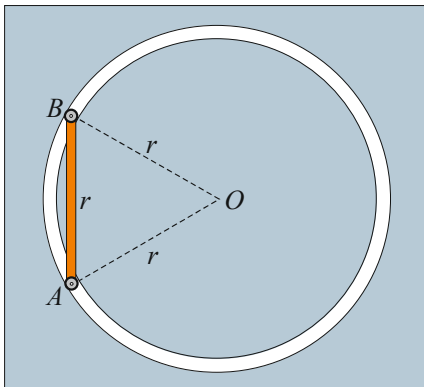
Betrakta två kugghjul med radierna  $R$  respektive  $r$  som är förenade med armen  $OA$ . Det stora kugghjulet roterar med en konstant vinkelhastighet  $\omega_1$  samtidigt som armen roterar också med en konstant vinkelhastighet  $\omega_2$  i de på figuren angivna riktningarna. Bestäm accelerationen  $\mathbf{a}_B$  hos punkten  $B$  på lilla kugghjulet i ögonblicket då armen  $OA$  är horisontell och radien  $AB$  är vinkelrät mot  $OA$ .

2)



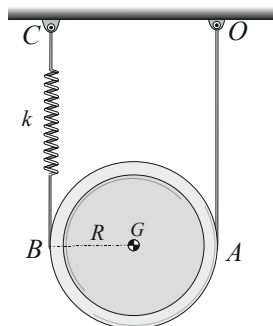
En kort tid efter uppskjutningen rör sig en raket med massan  $m$  och längden  $l$  under inverkan av dragkraften  $T$  från motorn samt tyngdkraften. I ett visst ögonblick då raketen är horisontell och har endast translationshastighet ändras riktningen på dragkraften  $T$  så att den bildar vinkeln  $\theta$  med horisontalriktningen enligt figuren. I detta ögonblick bestäm accelerationen av raketens spets  $\mathbf{a}_A$ . Approximera raketens tröghetsmoment med det av en stång med längden  $l$ .

3)



Rörelsen av en stång  $AB$  med massan  $m$  och längden  $r$  styrs av två små hjul i  $A$  och  $B$  som glider lätt längs ett vertikalt cirkelformat spår med radien  $r$ . Stången släpps från vila i det vertikala läget som visas i figuren. Bestäm normalkrafterna  $N_A$  och  $N_B$  från spåret på stången då stångens masscentrum passerar lägsta läget och är direkt under  $O$ .

4)



Betrakta en cylinder med massan  $m$  och radien  $R$  som är upphängd med hjälp av en lina  $OABC$  som är lindad kring cylindern. Delen  $BC$  av linan innehåller en lätt fjäder med fjäderkonstanten  $k$ . Härled rörelseekvationen för cylindern samt bestäm perioden för dess svängningar kring jämviktsläget. Antag att  $OA$  och  $BC$  är vertikala samt att det inte förekommer någon glidning mellan linan och cylindern under rörelsen.

## Teori (TEN A)

**5) a.** Rita nödvändiga tydliga figurer och härled sambandet för tidsderivatan  $\dot{\mathbf{e}}_x$  av en enhetsvektor av det rörliga koordinatsystemet. (2p)

**b.** Utgå från kraftekvationen i ett inertialsystem  $S$  och härled kraftekvationen i ett accelererande koordinatsystem  $S'$ . Sambandet mellan accelerationerna i  $S$  och  $S'$  behöver inte härledas. Uttrycken för alla nödvändiga tröghetskrafter måste framgå. (2p)

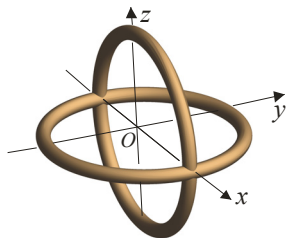
**c.** Definiera vad som menas med momentancentrum  $C$  och visa (med alla nödvändiga motiveringar) att det alltid existerar vid en stel kropps plana rörelse med  $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ . (2p)

**6) a.** Betrakta tre koordinatsystem  $S_0, S_1$  och  $S_2$ , inför nödvändiga vinkelhastigheter och definiera nödvändiga vinkelaccelerationer. Utgå från additionsformeln för vinkelhastigheter och härled additionsformeln för vinkelaccelerationerna:  $\mathbf{a}_{2,0} = \mathbf{a}_{2,1} + \mathbf{a}_{1,0} + \boldsymbol{\omega}_{1,0} \times \mathbf{a}_{2,1}$ . (2p)

**b.** Betrakta ett partikelsystem definiera ett masscentrumsystem och härled uttrycket för kinetiska energins  $T$  två delar. (2p)

**c.** Härled (med alla nödvändiga motiveringar) parallellförflyttningssatsen för tröghetspridukten  $I_{xy}$ . (2p)

**7) a.**



Betrakta två lika ringar vardera med massan  $m$  och radien  $r$  som är sammansvetsade enligt figuren, med den ena ringen i  $xy$ -planet och den andra i  $xz$ -planet och bestäm komponenterna av tröghetsmatrisen  $\mathbf{I}_O$  för den sammansatta kroppen med avseende på origo  $O$ .

(2p)

**b.** Betrakta ett partikelsystem, definiera ett masscentrumsystem och visa med alla nödvändiga motiveringar att  $\mathbf{H}_G = \mathbf{H}'_G$ . (2p)

**c.** Betrakta en stel kropp som roterar kring en fix punkt  $O$  och härled uttrycket för kroppens rörelsemängdsmoment med avseende på den fixa punkten  $\mathbf{H}_O$ . (2p)

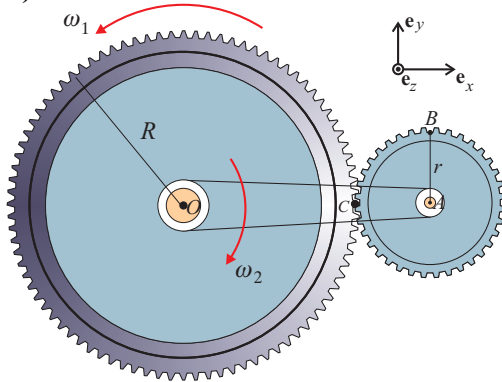
**8) a.** Betrakta en stel kropp som roterar kring en fix punkt, inför och beskriv ett i denna situation lämpligt koordinatsystem och härled med alla nödvändiga motiveringar Eulers dynamiska ekvationer. (2p)

**b.** Rita en figur och formulera i ord och formel Hamiltons variationsprincip. (2p)

**c.** Härled med alla nödvändiga motiveringar Lagranges ekvationer från Hamiltons variationsprincip. (2p)

## Lösningar

1)



1) Bestäm först lilla hjulets vinkelhastighet  $\omega$

Vi har:  $\mathbf{v}_C = R\omega_1 \mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{v}_A = -(R+r)\omega_2 \mathbf{e}_y$  (1).

Sambansformeln för hastigheten ger

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CA} = R\omega_1 \mathbf{e}_y + \omega \mathbf{e}_z \times r \mathbf{e}_x = (R\omega_1 + r\omega) \mathbf{e}_y \quad (2)$$

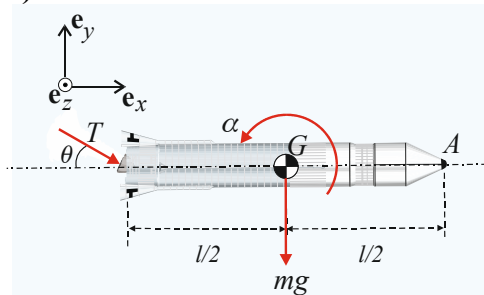
(1) och (2) ger  $\mathbf{e}_y$ :  $R\omega_1 + r\omega = -(R+r)\omega_2 \Rightarrow$

$$\omega = -\frac{R\omega_1 + (R+r)\omega_2}{r}$$

2) Bestäm nu

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \underbrace{\alpha \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_{AB}}_0 - \omega^2 \mathbf{r}_{AB} = -\omega^2 (R+r) \mathbf{e}_x - \frac{[R\omega_1 + (R+r)\omega_2]^2}{r} \mathbf{e}_y$$

2)



1) Formulera kraft- och momentekvationerna för raketen

$$\mathbf{e}_x: ma_{Gx} = T \cos \theta \Rightarrow a_{Gx} = \frac{T}{m} \cos \theta$$

$$\mathbf{e}_y: ma_{Gy} = -mg - T \sin \theta \Rightarrow a_{Gy} = -g - \frac{T}{m} \sin \theta$$

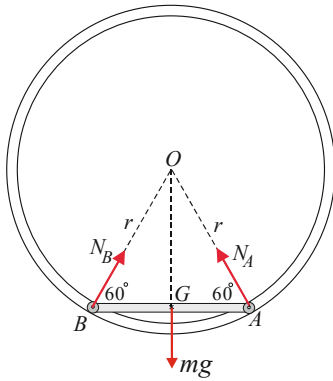
$$\curvearrowleft G: \frac{1}{12} ml^2 \alpha = \frac{1}{2} T l \sin \theta \Rightarrow \alpha = \frac{6T}{ml} \sin \theta$$

2) Kinematiken ger

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_G + \alpha \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_{GA} = \mathbf{a}_G + \alpha \mathbf{e}_z \times \frac{l}{2} \mathbf{e}_x = \frac{T}{m} \cos \theta \mathbf{e}_x - \left( g + \frac{T}{m} \sin \theta \right) \mathbf{e}_y + \frac{6T}{ml} \sin \theta \mathbf{e}_z \times \frac{l}{2} \mathbf{e}_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{a}_A = \frac{T}{m} \cos \theta \mathbf{e}_x + \left( \frac{2T}{m} \sin \theta - g \right) \mathbf{e}_y}}$$

3)



1) Stången roterar kring  $O$ . Bestäm vinkelhastigheten  $\omega_1$  i lägsta punkten med hjälp av energiekvationen.

Vi har

$$T_1 + V_1 = T_0 + V_0 \quad (1)$$

med  $T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$  och

$$I_O = I_G + m OG^2 = \frac{1}{12} mr^2 + m \frac{3}{4} r^2 = \frac{5}{6} mr^2$$

$$\text{fås } T_1 = \frac{1}{2} \frac{5}{6} mr^2 \omega_1^2.$$

2) Vidare  $T_0 = 0$ ,  $V_0 = 0$  and  $V_1 = mgy_G = -mg \frac{\sqrt{3}}{2} r$

vilket insatt i (1) ger

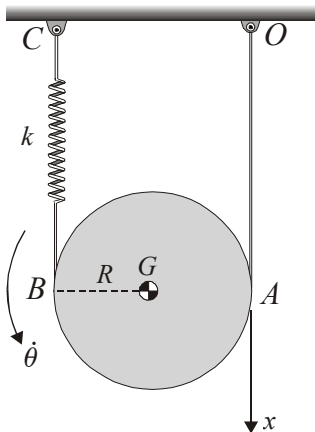
$$\frac{1}{2} \frac{5}{6} mr^2 \omega_1^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} mgr \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{6\sqrt{3}}{5} \frac{g}{r}}$$

3) Formulera kraftekvationen för stången i lägsta punkten

$$\uparrow: ma_{Gy} = -mg + 2N \sin 60 \Rightarrow m\omega_1^2 OG = -mg + \sqrt{3}N \Rightarrow \sqrt{3}N = mg + m \frac{6\sqrt{3}}{5} \frac{g}{r} \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

$$N_A = N_B = N = \frac{14}{5\sqrt{3}} mg \approx 1,62mg$$

4)



**Lösning:**

1) Inför generaliserad koordinat  $\theta$ . Kinematiken ger

$$\dot{x}_G = R\dot{\theta}, \quad \dot{x}_B = 2R\dot{\theta}, \quad x_B = 2R\theta$$

2) Bestäm  $L = T - V$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k x_B^2 - mg x_G = \frac{1}{2} k (2R\theta)^2 - mg R\theta = 2kR^2 \theta^2 - mg R\theta$$

$$L = T - V = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\theta}^2 - 2kR^2 \theta^2 + mg R\theta$$

3) Formulera Lagranges ekvation

Vi har  $\frac{\partial L}{\partial \theta} = mgR - 4kR^2 \theta$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2} m R^2 \dot{\theta}$  vilket ger:

$$\theta: \frac{3}{2} m R^2 \ddot{\theta} + 4kR^2 \theta - mgR = 0. \text{ Jämviktsläget fås för } \ddot{\theta}_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = \frac{mg}{4kR} \text{ och transformationen}$$

$\theta = \theta_0 + \theta'$  ger den homogena svängningsekvationen kring jämviktsläget

$$\theta: \ddot{\theta}' + \frac{8}{3} \frac{k}{m} \theta' = 0 \Rightarrow \omega = 2\sqrt{\frac{2}{3} \frac{k}{m}} \Rightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{m}{k}}$$