

Tentamen i Hållfasthetslära gkF (4C1055) den 23 maj 2007

Resultat meddelas senast den 13 juni 2007 kl. 13.00 på Mina sidor i LADOK. Klagomål på rättningen skall vara framförda senast en månad därefter.

Hjälpmedel: Formelsamling i hållfasthetslära, matematiska handböcker och räknedosa.

Examinator: Bo Alfredsson, tel 790 7667

OBS! Tentand skall kunna visa legitimation och kvitto på erlagd kåravgift.

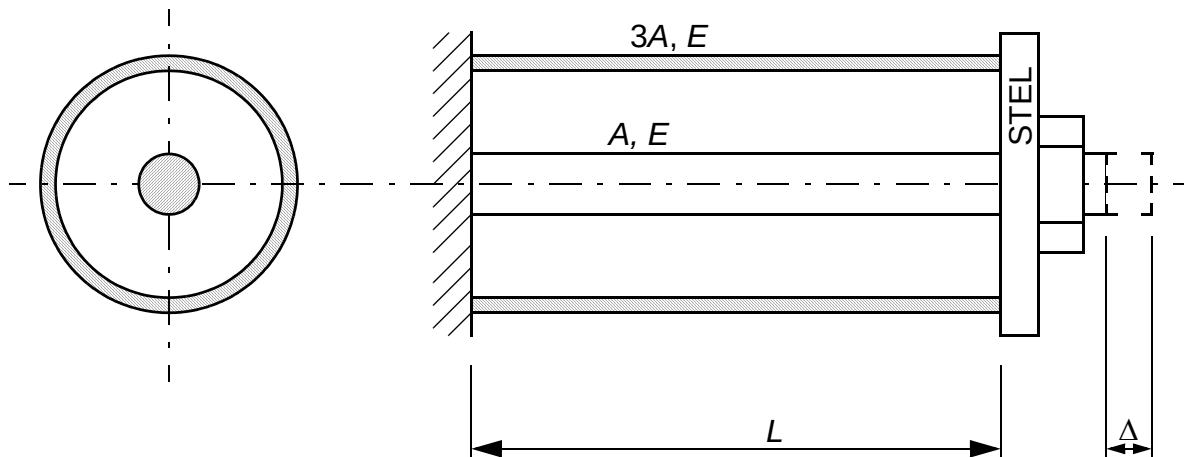
Skriv endast på en sida av bladen.

Skriv tydligt namn, program och personnummer på varje blad.

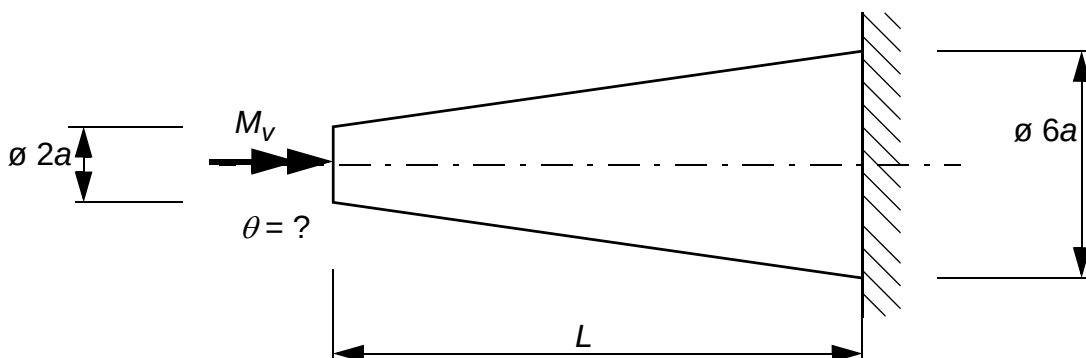
Rita gärna figurer i färg men ej med rödpenna.

Lösningar som är otydliga och svåra att följa kommer inte att bedömas.

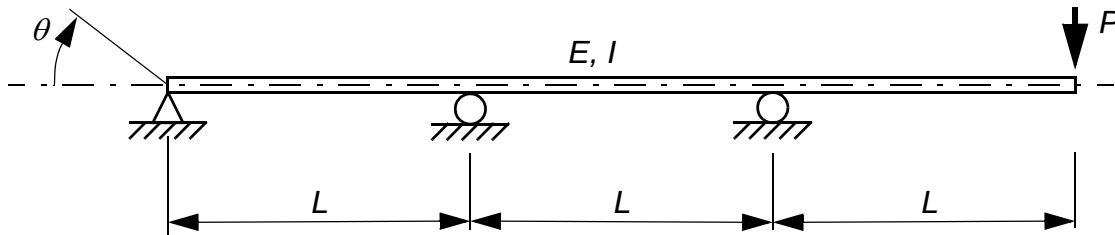
1. En skruv är monterad i en hylsa. Båda är monterade mellan två stela plan, enligt figuren. Från läget när de olika delarna läggs ihop utan belastning dras skruven åt en längd Δ . Din uppgift är att bestämma spänningarna i hylsan och skruven efter att skruven dragits åt. Materialet i skruv och hylsa har elasticitetsmodulen E . Tvärsnittsareorna är A respektive $3A$. (6p)



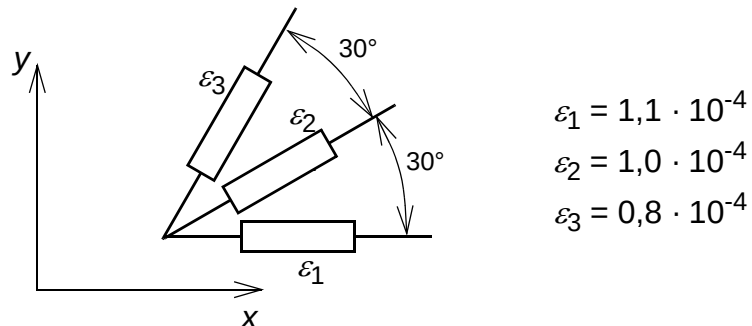
2. En axel med cirkulärt tvärsnitt är monterad i en stel vägg. Bestäm axelns totala elastiska förvridning, det vill säga den fria ändens rotation då vridmomentet M_v läggs på. Skjuvmodulen är G och geometrin ges i figuren. (6p)



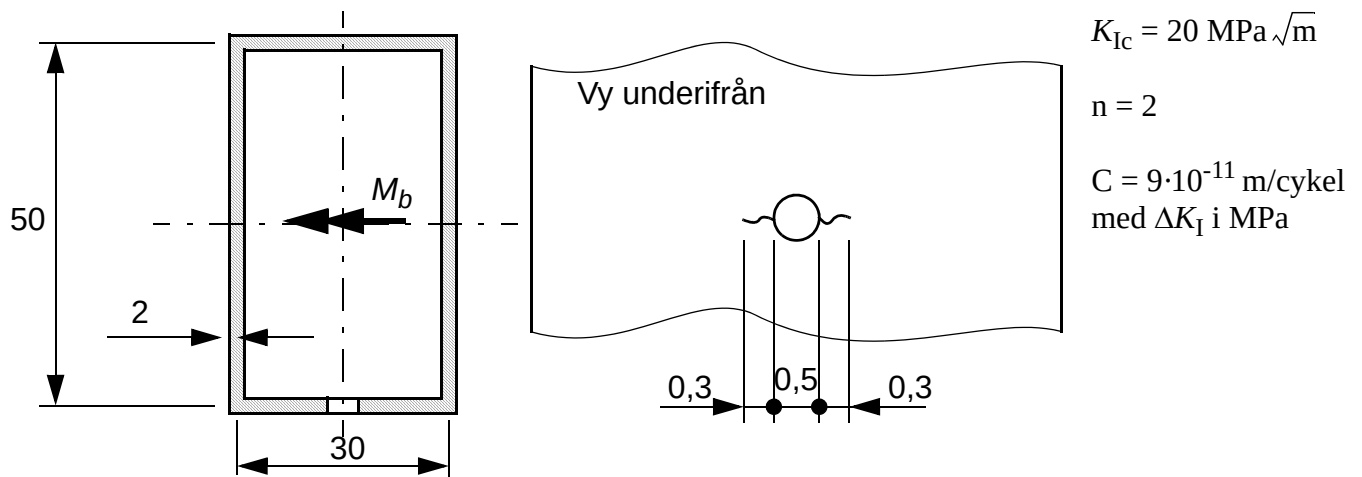
3. En balk är fritt upplagd på tre stöd. I den högra, fria, änden belastas balken med en punktkraft P , se figuren. Bestäm rotationen θ hos balkändan vid det vänstra stödet. Balken är $3L$ lång med elasticitetsmodul E och areatröghetsmoment I . (6p)



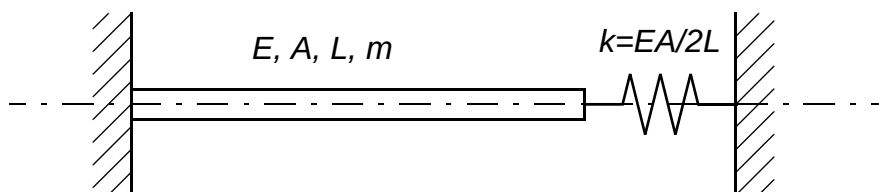
4. Tre töjningar mäts på ytan av en tunn plåt vid belastning i plåtens plan. Bestäm effektivspänningen enligt Tresca. Materialet är stål med $E = 100 \text{ GPa}$ och $\nu = 0,25$. (6p)



5. I underkant av en balk med tunnväggigt rektangulärt håltvärsnitt finns ett antal dräneringshål med diametern $0,5 \text{ mm}$. Godstjockleken är 2 mm överallt. Vid ett av dessa hål har man hittat två sprickor med längden, $a = 0,3 \text{ mm}$, vardera. Hur många lastcykler tål balken innan sprickan blir kritisk då $M_b = 500(1 + \sin \omega t) \text{ Nm}$? Du kan använda formfunktionens startvärde ($a = a_0 = 0,3 \text{ mm}$) för hela spricktillväxten. Materialdata finns i figuren. (6p)



6. En stång med massan m är fast inspänd i ena änden, medan andra änden sitter fast i en linjär fjäder. Bestäm lägsta egenvinkelfrekvens vid dragsvängning för fjäderkonstanten $k = EA/2L$, elasticitetsmodulen E , tvärsnittsarean A och längden L . (6p)



1) jämv; Def: $\delta_s - \Delta = \delta_H$ $\left. \begin{array}{l} \delta_s - \Delta = \delta_H \\ \delta = \frac{\sigma}{E} \cdot L \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sigma_s - \frac{\Delta E}{L} = \sigma_H \quad \text{t.j.m.v} \\ \sigma_s \cdot A + (\sigma_s - \frac{\Delta E}{L}) 3A = 0 \end{array}$

$\Rightarrow \sigma_s \cdot A + \sigma_H \cdot 3A = 0$

$\Rightarrow \sigma_s = \frac{3\Delta E}{4L} \quad \sigma_H = -\frac{\Delta E}{4L}$

2) a $3a$ $r = a + \frac{2a}{L}x$ $FS 6.74$ $v = \frac{M_v}{GJk}$ $FS 6.76$ $K = \frac{\pi r^4}{2}$ $d\theta = \frac{v dx}{L}$ $\theta = \int_0^L \frac{v dx}{L}$ $\theta = \frac{M_v L}{\pi G a^4} \int_0^3 \frac{dt}{t^4} \Rightarrow \theta = \frac{26 M_v L}{81 \pi G a^4}$

$\theta = \int_0^L \frac{v dx}{L} = \int_0^L \frac{M_v}{GJk L} dx = \frac{M_v}{GJk L} \int_0^L dx = \frac{M_v L}{GJk}$

$\theta = \frac{M_v L}{\pi G a^4} \int_0^3 \frac{dt}{t^4} = \frac{M_v L}{\pi G a^4} \left[-\frac{1}{3t^3} \right]_0^3 = \frac{M_v L}{\pi G a^4} \left(-\frac{1}{3 \cdot 27} + \frac{1}{3 \cdot 0} \right) = \frac{M_v L}{\pi G a^4} \left(\frac{1}{27} \right) = \frac{M_v L}{27 \pi G a^4}$

$\theta = \frac{26 M_v L}{81 \pi G a^4}$

3) L L L P $FS 32.2.5$ $\theta_{AH} = \frac{M_A L}{3EI} + \frac{PL^2}{6EI}$ $\theta_{AH} = \theta_{AV}$ $\Rightarrow M_A = -\frac{PL}{4}$ $\theta_{AV} = -\frac{M_A L}{3EI}$ $\theta = -\frac{M_A L}{6EI} \Rightarrow \theta = \frac{PL^2}{24EI}$

$\theta_{AH} = \frac{M_A L}{3EI} + \frac{PL^2}{6EI}$ $\theta_{AV} = -\frac{M_A L}{3EI}$ $\theta_{AH} = \theta_{AV} \Rightarrow \frac{M_A L}{3EI} + \frac{PL^2}{6EI} = -\frac{M_A L}{3EI} \Rightarrow \frac{2M_A L}{3EI} = -\frac{PL^2}{6EI} \Rightarrow M_A = -\frac{PL}{4}$ $\theta = -\frac{M_A L}{6EI} = \frac{PL^2}{24EI}$

4) Transformera följande till xy-systemet. FS (2.21)

$\begin{cases} \epsilon_I = \epsilon_x \\ \epsilon_{II} = \epsilon_x \cdot \frac{3}{4} + \epsilon_y \cdot \frac{1}{4} + \gamma_{xy} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \epsilon_{III} = \epsilon_x \cdot \frac{1}{4} + \epsilon_y \cdot \frac{3}{4} + \gamma_{xy} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_I \\ \epsilon_y = \epsilon_I - 2\epsilon_{II} + 2\epsilon_{III} \\ \gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}} (-2\epsilon_I + 3\epsilon_{II} - \epsilon_{III}) \end{cases}$

$\epsilon_x = \epsilon_I = 1,1 \cdot 10^{-4}$ $\epsilon_y = \epsilon_I - 2\epsilon_{II} + 2\epsilon_{III} = 0,7 \cdot 10^{-4}$ $\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}} (-2\epsilon_I + 3\epsilon_{II} - \epsilon_{III}) = 0$

Hookes lag vid plan spänning ($\sigma_z = 0$) FS (3.4)

$\sigma_x = \dots = 13,6 \text{ MPa}$ $\sigma_y = \dots = 10,4 \text{ MPa}$ $\tau_{xy} = 0 \Rightarrow x \& y \text{ är huvud rikt.}$ $\sigma_1 = 13,6 \text{ MPa}$ $\sigma_2 = 10,4 \text{ MPa}$ $\sigma_3 = 0$

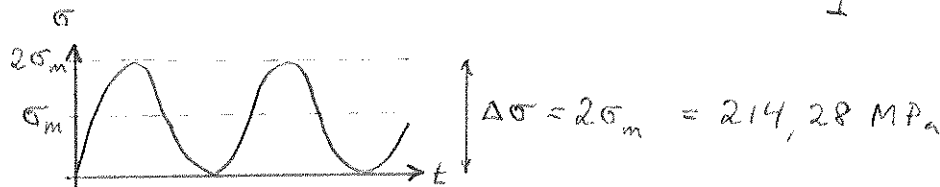
$\sigma_e^{Tr} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) = 13,6 \text{ MPa}$

5/  $M_b(t) = 500(1 + \sin(\omega t))$

$$\sigma(t, z) = \frac{M_b(t)}{I} \cdot z \quad \text{FS (6.7)} \quad (\text{Beträknas vid } z = -25 \text{ mm})$$

Tab. 31.2 i FS ger $I_y = \dots = 1,166 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$

$$\sigma(t) = \sigma_m(1 + \sin(\omega t)) \quad \text{där} \quad \sigma_m = \frac{500 \text{ Nm}}{I} \cdot |z_{\min}| = 107,14 \text{ MPa}$$



med $s = s_0 = \frac{a_0}{r + a_0}$

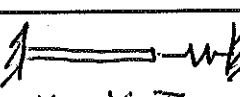
Använd fall 3 i FS std 264. $K_I = 2\sigma_m \sqrt{\pi a} f_3(s)$

$f_3(s) = 1,36$

$$a_c = \left(\frac{K_{Ic}}{2\sigma_m f_3} \right)^2 \cdot \frac{1}{\pi} = 1,5 \text{ mm}$$

Paris lag FS (23.62) $\frac{da}{dN} = C(\Delta K_I)^n = C(\Delta \sigma \sqrt{\pi} f_3)^2 \cdot a$

$$\int_{a_0}^{a_c} \frac{1}{a} da = \ln\left(\frac{a_c}{a_0}\right) \Rightarrow N = \frac{\ln\left(\frac{a_c}{a_0}\right)}{C} (\Delta \sigma \sqrt{\pi} f_3)^{-2} = 67025 \text{ cykler}$$

6/  $\mu^2 = \frac{m \omega^2}{L EA}$ FS 16.108 11.109

$u = X \cdot T$

$X = A \cos \mu x + B \sin \mu x \quad (k = \frac{EA}{2L})$

$X(0) = A = 0$

$X = L: \quad \text{Diagram showing a beam of length L with a spring at the right end. The beam is fixed at the left end. The displacement is u and the spring force is N = k \cdot \delta = -u.$

$N = EA u'$

$\Rightarrow EA X'(L) + k X(L) = 0$

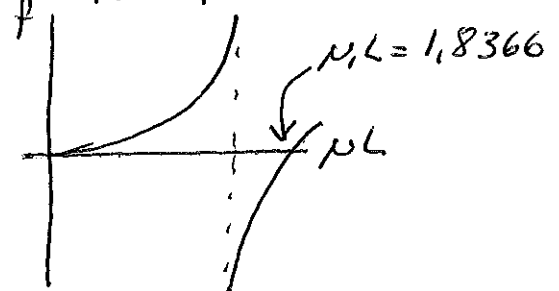
$EA \mu B \cos \mu L + k \sin \mu L = 0$

$\tan \mu L + \frac{EA \mu}{k} = 0$

$f = \tan \mu L + 2 \mu L = 0$

Numerisk lösning

μL	f
0	0
0,1	0,3
...	...
1,8365	-0,0016
1,8366	0,000046



$$\omega_1 = 1,8366 \sqrt{\frac{EA}{mL}}$$

jmf konsolbalk med fri änd

$\omega_1 = 1,5708 \sqrt{\frac{EA}{mL}}$