

SK1104 Klassisk fysik

Lösningsförslag till tentamen

Måndagen den 17 januari, 2022, 14:00-16:30

Del A - 1p per deluppgift

1. a) Vi börjar med att notera att antalet svängningar per sekund är detsamma som frekvensen. Frekvensen är emellertid alltid densamma oberoende av i vilket medium som en våg utbreder sig, vilket betyder att vi kan räkna fram den utan att behöva använda brytningsindex i beräkningarna. Resultatet blir att:

$$f = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow f = \frac{2,99792458 \cdot 10^8}{589,0 \cdot 10^{-9}} \text{ Hz} = 5,090 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

b) De två korrekta svaren är (övriga svar är felaktiga)

2. Bilden hamnar bakom spegeln.

4. Avståndet mellan bild och spegel är 40 dm.

Uppgiften rättas så att det ges +0.5p för varje rätt svar och dras av -0.5p för varje felaktigt svar. Totalsumman kan som lägst bli 0p.

c) Det finns flera olika sätt att lösa denna uppgift. En enkel design för att åstadkomma intensitetsminskningen (och behålla ett linjärpolariserat ljus) är att låta det linjärpolariserade ljuset passera genom en (ytterligare) linjärpolarisator som har sin genomsläppsriktning vriden en vinkel θ i förhållande till den infallande strålens polarisationsriktning. I detta fallet ger Malus lag att den intensitet som släpps igenom är:

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

Med $I = 0,25I_0$ får vi att

$$0,25 = \cos^2 \theta \Rightarrow \cos \theta = \pm 0,50 \Rightarrow \theta = \pm 60^\circ, \pm 120^\circ$$

Linjärpolarisatorn ska således vridas 60° åt endera hållet i förhållande till den infallande strålens intensitet.

Två andra exempel på sätt att minska intensiteten och behålla polarisationen är antingen i) att låta ljuset reflekteras mot ett material där polarisationsriktning och infallsvinkel samverkar med ett lämpligt val av brytningsindex eller ii) att låta strålen gå genom en $\lambda/2$ -platta med lämpligt val av brytningsindex, så att en del av intensiteten reflekteras bort. Poäng på uppgiften ges för alla lösningar som ger en linjärpolariserad stråle mot objektet. Notera att lösningen är oberoende av det linjärpolariserade ljusets vinkel, eftersom objektet kan roteras fritt och att det därför går att kompensera för en vridning av polarisationsriktningen om så skulle behövas.

Del B - 4p per uppgift

2. Eftersom uttryckningsfordonet är i rörelse och frekvensen ändras vid passagen, rör det sig om Dopplereffekt. Vid den temperatur som är angiven i uppgiften (13 °C) blir ljudfarten

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{1,40 \cdot 8,314 \cdot 286,15}{28,8 \cdot 10^{-3}}} \text{ m/s} = 340 \text{ m/s}$$

Låt den starkaste frekvensen som uttryckningsfordonet sänder ut vara f_0 och anta att uttryckningsfordonet kör med en konstant fart v_s när det passerar dig. Då gäller att när fordonet närmar sig kommer den starkaste uppmätta frekvensen att vara

$$f_1 = \frac{v}{v - v_s} f_0 \quad \text{där} \quad f_1 = 889 \text{ Hz}$$

medan när fordonet avlägsnar sig, kommer den starkaste uppmätta frekvensen att vara

$$f_2 = \frac{v}{v + v_s} f_0 \quad \text{där} \quad f_2 = 773 \text{ Hz}$$

Dividera dessa båda ekvationer med varandra för att eliminera f_0 , vilket ger

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{v + v_s}{v - v_s} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} v - \frac{f_1}{f_2} v_s = v + v_s$$

Lös ut fordonet fart v_s från denna ekvation

$$v_s = \frac{\frac{f_1}{f_2} - 1}{\frac{f_1}{f_2} + 1} \cdot v \Rightarrow v_s = \frac{\frac{889}{773} - 1}{\frac{889}{773} + 1} \cdot 340 \text{ m/s} = 23,7 \text{ m/s} \approx 85 \text{ km/h}$$

Den starkaste frekvensen som sänds ut kan nu beräknas via

$$f_0 = \frac{v - v_s}{v} f_1 \Rightarrow f_0 = \frac{340 - 23,7}{340} \cdot 889 \text{ Hz} = 827 \text{ Hz}$$

eller alternativt via

$$f_0 = \frac{v + v_s}{v} f_2 \Rightarrow f_0 = \frac{340 + 23,7}{340} \cdot 773 \text{ Hz} = 827 \text{ Hz}$$

Den starkaste utsända frekvensen ligger således vid 827 Hz.

3. a) Radarvågor rör sig med ljusfarten och om avståndet till flygplanet är L , så är den sträcka som radarsignalen har rört sig mellan utsändandet och mottagandet av radarsignalen $2L$, då den går fram och tillbaka mellan radarstationen och flygplanet. Detta ger att

$$2L = c \cdot t \Rightarrow L = \frac{c \cdot t}{2} \Rightarrow L = 13,0 \text{ km}$$

Om vi låter avståndet på kartan vara x och höjden $h = 1000 \text{ m}$, ger Pythagoras sats att

$$L^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow x = \sqrt{L^2 - h^2} \Rightarrow x = 12,8 \text{ km}$$

b) Den totalt utsända effekten från sändaren koncentreras till en stråle som upptar 0,5% av en sfärisk yta. Det betyder att intensiteten hos den del av strålen som träffar flygplanet är

$$I_f = \frac{P_s}{k \cdot 4\pi L^2}$$

där $k = 0,005$ enligt uppgiftsformuleringen. Låt den effektiva reflekterande arean vara A_{eff} . Den effekt som reflekteras tillbaka från flygplanet är då

$$P_r = I_f \cdot A_{eff} = \frac{A_{eff}}{k \cdot 4\pi L^2} \cdot P_s$$

Den reflekterade intensitet som kommer tillbaka till radaranläggningen är (observera att det nu är flygplanet som är sändare och den reflekterade signalen är inte koncentrerad till någon speciell vinkel)

$$I_m = \frac{P_r}{4\pi L^2} = \frac{A_{eff}}{k \cdot (4\pi L^2)^2} \cdot P_s$$

Denna intensitet fångas in över radarantennens area, $A_m = 12,0 \text{ m}^2$ och ger upphov till en totalt mottagen effekt som är

$$P_m = I_m \cdot A_m = \frac{A_{eff} \cdot A_m}{k \cdot (4\pi L^2)^2} \cdot P_s \Rightarrow A_{eff} = \frac{k \cdot (4\pi L^2)^2}{A_m} \cdot \frac{P_m}{P_s}$$

Enligt uppgiften är den mottagna effekten $\beta = -68 \text{ dBm}$, vilket betyder att

$$\beta = 10 \log \frac{P_m}{P_0} \Rightarrow P_m = P_0 \cdot 10^{\beta/10} \Rightarrow P_m = 1,58 \cdot 10^{-10} \text{ W}$$

Insättning av värden ger slutligen att

$$A_{eff} = \frac{0,005 \cdot (4\pi \cdot (13,0 \cdot 10^3)^2)^2}{12,0} \cdot \frac{1,58 \cdot 10^{-10}}{8,0 \cdot 10^3} \text{ m}^2 = 37 \text{ m}^2$$

4. a) Vi börjar med att beräkna de två ljudfarterna som har uppmätts:

$$v_1 = \frac{20,0}{0,0114} \text{ m/s} = 1,75 \text{ km/s} \quad ; \quad v_2 = \frac{20,0}{0,0476} \text{ m/s} = 420 \text{ m/s}$$

Utbredningsfarterna för longitudinella (v_L) respektive transversella (v_T) vågor ges enligt formelsamlingen av

$$v_L = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad \text{samtidigt} \quad v_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Vidare är det givet i uppgiften att bulkmodulen B och skjuvmodulen G är relaterade till varandra via tvärkontraktionstalet ν och ekvationen

$$B = G \cdot \frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu}$$

vilket betyder att

$$\frac{v_L}{v_T} = \sqrt{\frac{B}{G}} = \sqrt{\frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu}}$$

För att detta ska vara en vettig fysikalisk storhet och ett reellt tal, måste vi kräva att $0 < \nu < 0,5$. Detta medför att $v_L > v_T$ och vi kan identifiera de uppmätta ljudfarterna som

$$v_L = v_1 = 1,75 \text{ km/s} \quad ; \quad v_T = v_2 = 420 \text{ m/s}$$

Vi får dessutom att

$$\left(\frac{v_L}{v_T}\right)^2 (1 - 2\nu) = 2 - 2\nu \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{\left(\frac{v_L}{v_T}\right)^2 - 2}{2\left(\left(\frac{v_L}{v_T}\right)^2 - 1\right)}$$

Insättning av värden ger slutligen att

$$\nu = \frac{\left(\frac{1750}{420}\right)^2 - 2}{2\left(\left(\frac{1750}{420}\right)^2 - 1\right)} = 0,47$$

b) Risken för att lerlagret kollapsar och börjar att glida är som störst för transversella vågor i lera samt när vi har ett resonansfenomen. I det aktuella fallet fås resonans när vibrationsfrekvenserna motsvarar de frekvenser som ger upphov till en stående våg mellan lerans ytor mot luft respektive mot berggrunden. Eftersom lera har högre densitet än luft och mindre densitet än berg (och motsvarande gäller för ljudutbredningsfarterna), är lerans akustiska impedans $Z = \rho v$ mycket större än för vatten samt mycket mindre än för berggrunden. Detta möjliggör ett resonansfenomen med en stående våg som har totalreflektion mot tätare medium i ena änden (berggrunden) och totalreflektion mot tunnare medium i andra änden (luft). Detta betyder att resonans kan uppträda vid frekvenser som motsvaras av:

$$f_n = \frac{(2n+1)v_T}{4L} \quad \text{där} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

De två lägsta frekvenserna som ger resonans blir då

$$f_0 = \frac{1 \cdot 420}{4 \cdot 4 \cdot 5,0} \text{ Hz} = 21 \text{ Hz} \quad ; \quad f_1 = \frac{3 \cdot 420}{4 \cdot 4 \cdot 5,0} \text{ Hz} = 63 \text{ Hz}$$