



SF1673 Analys i en variabel
Tentamen
den 21 december 2022

Skrivtid: 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Danijela Damjanović

Tentamen består av åtta uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de fem första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt sex poäng. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del I. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	20	Grundläggande problem	15	16	16	16	16	16
II	18	Avancerade problem	0	0	4	8	11	14

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är välpresenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är välmotiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

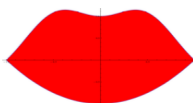
1. Radien på en cirkel ökar med den konstanta hastigheten 5 cm/s. Hur snabbt ändras cirkelns area vid den tidpunkten då radien är 1 m? Hur snabbt ändras cirkelns omkrets? **(4 p)**

2. Beräkna arean av det begränsade område som innesluts av kurvorna:

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ och}$$

$$g(x) = 1 - x^2 + \frac{1 - \cos(2\pi x)}{6}.$$

(4 p)



3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $xy' + (1-x)y = 0$, $x > 0$, som har gränsvärdet $+\infty$ då $x \rightarrow 0+$. **(4 p)**

4. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen $g(x)$, där

$$g(x) = \int_0^x \frac{1-t}{(1+t)(1+t^2)} dt, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

(4 p)

5. Låt

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- (a) Motivera varför funktionen har ett lokalt maximum i origo. **(1 p)**
(b) Visa att $f'(0) = 0$. **(1 p)**
(c) Skissera kurvan. Bestäm särskilt alla nollställen samt de lokala extrempunkterna. (Du behöver inte beräkna inflexionspunkter). **(2 p)**

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. Ge bevis eller motexempel till följande påståenden:

- a) Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet (a, b) så är $(f(x))^2$ deriverbar där. **(2 p)**
b) Om funktionen $f(x)$ är deriverbar på intervallet (a, b) så är $(f(x))^2$ kontinuerlig där. **(2 p)**
c) Om funktionen är kontinuerlig på intervallet (a, b) så är den begränsad där. **(2 p)**

OBS. I uppgift 6 ska du inte använda satser från häftet och föreläsningarna.

7. (a) Formulera och bevisa insättningsformeln. **(4 p)**
(b) Finns det en funktion som inte har något primitiv? Motivera ditt svar. **(2 p)**
8. (a) Låt $a_n \geq 0$ för alla $n = 1, 2, 3, \dots$ och antag att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar. Visa att även $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergerar. **(3 p)**
(b) Gäller ovanstående även om vi släpper på kravet att $a_n \geq 0$? Ge bevis eller motexempel. **(3 p)**
-