

TENTAMEN TEORETISK FYSIK SI1155

Måndag 2022-05-30 kl 08:00-13:00

Skriv på varje sida Namn och problemnummer

Motivera noga Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag

Hjälpmedel BETA, miniräknare, formelblad på skrivningens sida 3-5

Poängsättning 6 poäng per problem

Examinator Mats Wallin tel 073 765 2000

1. En stråle spinn-1/2 partiklar genomgår en sekvens av Stern-Gerlach experiment. I det första mäts spinnet i z-riktningen. Till den andra mätningen skickas strålen med spinn upp i z-riktningen och spinnet mäts i riktningen $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x \sin \theta + \mathbf{e}_z \cos \theta$. Vid den andra mätningen, vilka resultat kan fås och med vilka sannolikheter fås dessa? Vad blir spinnets väntevärde?

2. 10 identiska partiklar placeras i en gemensam tvådimensionell oändlig lådpotential med bredd a . Bestäm grundtillståndsenenergin om partiklarna är

(a) bosoner utan spinn.

(b) icke-växelverkande elektroner.

(c) icke-växelverkande elektroner som samtliga är i spinn upp tillståndet.

3. En partikel är vid tiden $t=0$ i grundtillståndet i en endimensionell harmonisk oscillator-potential. Vid tiden $t = 0$ kopplas en störande potential på som ges av $V(x, t) = axe^{-bt}$ där a, b är reella konstanter. Beräkna sannolikheten att hitta partikeln i första exciterade tillståndet vid tiden t med hjälp av första ordningens störningsräkning.

4. Hamiltonoperatoren för två spinn-1 i ett konstant magnetfält $\mathbf{B}$ är $H = a\mathbf{B} \cdot (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)$ där a är en konstant. Beräkna väntevärdet $\langle H \rangle$ vid temperaturen T .

5. Antag att Coulombpotentialerna i en Heliumatom ersätts med harmoniska oscillator-potentialer så att Hamiltonoperatoren för de två elektronerna i positionerna $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$ blir

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\mathbf{r}_1}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\mathbf{r}_2}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r_2^2 - \frac{\lambda}{4}m\omega^2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2$$

där $\lambda > 0$ är en konstant. Beräkna grundtillståndsenenergin (a) exakt och (b) med första ordningens störningsteori. Jämför resultaten.

Ledning: sätt $\mathbf{u} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/\sqrt{2}$, $\mathbf{v} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/\sqrt{2}$.

LYCKA TILL!

LÖSNINGAR

1. En stråle spinn-1/2 partiklar genomgår en sekvens av Stern-Gerlach experiment. I det första mäts spinnet i z-riktningen. Till den andra mätningen skickas strålen med spinn upp i z-riktningen och spinnet mäts i riktningen $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x \sin \theta + \mathbf{e}_z \cos \theta$. Vid den andra mätningen, vilka resultat kan fås och med vilka sannolikheter fås dessa? Vad blir spinnets väntevärde?

Spinnoperatoren i riktningen $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x \sin \theta + \mathbf{e}_z \cos \theta$ är

$$S_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = (S_x \sin \theta + S_z \cos \theta) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Eigenvärdena är spinn upp och spinn ner: $S_n = \lambda \hbar/2$ med $\lambda = \pm 1$. Bestäm motsvarande egenvektorer:

$$\begin{cases} a(\cos \theta - \lambda) + b \sin \theta = 0 \\ a \sin \theta - b(\cos \theta + \lambda) = 0 \end{cases}$$

ger

$$|\pm n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\lambda \cos \theta}} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \lambda - \cos \theta \end{pmatrix}$$

Sannolikhet för spinn upp:

$$P_+ = |\langle +n | +z \rangle|^2 = \frac{1}{2 - 2 \cos \theta} \left| (\sin \theta, 1 - \cos \theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{\sin^2 \theta}{2 - 2 \cos \theta}$$

För spinn ner:

$$P_- = |\langle -n | +z \rangle|^2 = \frac{1}{2 + 2 \cos \theta} \left| (\sin \theta, -1 - \cos \theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{\sin^2 \theta}{2 + 2 \cos \theta}$$

Kontroll:

$$P_+ + P_- = \frac{\sin^2 \theta}{2 - 2 \cos \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{2 + 2 \cos \theta} = \frac{4 \sin^2 \theta}{4 - 4 \cos^2 \theta} = 1$$

Väntevärde:

$$\langle S_n \rangle = \sum S_n P(S_n) = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\sin^2 \theta}{2 - 2 \cos \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{2 + 2 \cos \theta} \right) = \frac{\hbar}{2} \frac{\sin^2 \theta \cdot 4 \cos \theta}{4 - 4 \cos^2 \theta} = \frac{\hbar}{2} \cos \theta$$

SVAR: Spinn upp fås med sannolikhet $P_+ = \frac{\sin^2 \theta}{2 - 2 \cos \theta}$

Spinn ner fås med sannolikhet $P_- = \frac{\sin^2 \theta}{2 + 2 \cos \theta}$

Väntevärdet är $\langle S_n \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos \theta$

2. 10 identiska partiklar placeras i en gemensam tvådimensionell oändlig lådpotential med bredd a . Bestäm grundtillståndsenergin om partiklarna är

(a) bosoner utan spinn.

(b) icke-växelverkande elektroner.

(c) icke-växelverkande elektroner som samtliga är i spinn upp tillståndet.

Enpartikeltillstånden har energi $E_{n_x, n_y} = \frac{h^2}{8ma^2}(n_x^2 + n_y^2)$.

(a) Grundtillståndet fås när alla bosonerna är i enpartikelgrundtillståndet $n_x = n_y = 1$:

$$E = 10E_{1,1} = 10 \frac{h^2}{8ma^2}(1^2 + 1^2) = 20 \frac{h^2}{8ma^2}$$

(b) Grundtillståndet fås för spinnsingletten då två elektroner ryms i samma enpartikelrumstillstånd. Detta ger grundtillståndsenergin

$$E = 2E_{1,1} + 2E_{2,1} + 2E_{1,2} + 2E_{2,2} + 2E_{1,3} = 60 \frac{h^2}{8ma^2}$$

(c) Om alla elektroner är i spinn upp tillståndet ryms bara en elektron i samma enpartikelrumstillstånd. Detta ger energin

$$E = E_{1,1} + E_{2,1} + E_{1,2} + E_{2,2} + E_{1,3} + E_{3,1} + E_{2,3} + E_{3,2} + E_{1,4} + E_{4,1} = 100 \frac{h^2}{8ma^2}$$

3. En partikel är vid tiden $t = 0$ i grundtillståndet i en endimensionell harmonisk oscillatorpotential. Vid tiden $t = 0$ kopplas en störande potential på som ges av $V(x, t) = axe^{-bt}$ där a, b är reella konstanter. Beräkna sannolikheten att hitta partikeln i första exciterade tillståndet vid tiden t med hjälp av första ordningens störningsräkning.

Tidsberoende störningsräkning:

$$P_1 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t e^{i\omega_0 t'} \langle 1|V|0 \rangle dt' \right|^2 = \frac{a^2}{\hbar^2} |\langle 1|x|0 \rangle|^2 \left| \int_0^t e^{i\omega_0 t'} e^{-bt'} dt' \right|^2$$

där $\hbar\omega_0 = E_1 - E_0 = \hbar\omega$. Beräkna matriselementet:

$$\langle 1|x|0 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle 1|a^\dagger + a|0 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Beräkna tidsintegralen:

$$\int_0^t e^{(i\omega-b)t'} dt' = \frac{e^{(i\omega-b)t} - 1}{i\omega - b}$$

Absolutbelopp i kvadrat:

$$\left| \frac{e^{(i\omega-b)t} - 1}{i\omega - b} \right|^2 = \frac{(e^{(-i\omega-b)t} - 1)(e^{(i\omega-b)t} - 1)}{\omega^2 + b^2} = \frac{1 + e^{-2bt} - 2e^{-bt} \cos(\omega t)}{\omega^2 + b^2}$$

SVAR:

$$P_1 = \frac{a^2}{2\hbar m\omega} \frac{1 + e^{-2bt} - 2e^{-bt} \cos(\omega t)}{\omega^2 + b^2}$$

4. Hamiltonoperatoren för två spinn-1 i ett konstant magnetfält $\mathbf{B}$ är $H = a\mathbf{B} \cdot (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)$ där a är en konstant. Beräkna väntevärdet $\langle H \rangle$ vid temperaturen T .

Orientera koordinatsystemet så att magnetfältet är i z-riktningen. Då blir $H = aB(S_{z_1} + S_{z_2})$. Väntevärdet ges av

$$\langle H \rangle = \frac{\sum H e^{-\beta H}}{Z} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

Med $Q = \beta a B \hbar$ blir partitionsfunktionen

$$Z = \sum e^{-\beta H} = \sum_{m_1, m_2=0, \pm 1} e^{-Q(m_{z1}+m_{z2})} = 3 + 2e^Q + 2e^{-Q} + e^{2Q} + e^{-2Q}$$

Detta ger

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Q}{\partial \beta} \frac{\partial Z}{\partial Q} = -\frac{Q}{\beta} \frac{2e^Q - 2e^{-Q} + 2e^{2Q} - 2e^{-2Q}}{3 + 2e^Q + 2e^{-Q} + e^{2Q} + e^{-2Q}} \\ &= -aB\hbar \frac{\sinh(Q) + \sinh(2Q)}{3 + \cosh(Q) + \cosh(2Q)/2} \end{aligned}$$

SVAR:

$$\langle H \rangle = -aB\hbar \frac{2e^Q - 2e^{-Q} + 2e^{2Q} - 2e^{-2Q}}{3 + 2e^Q + 2e^{-Q} + e^{2Q} + e^{-2Q}} = -aB\hbar \frac{\sinh(Q) + \sinh(2Q)}{3 + \cosh(Q) + \cosh(2Q)/2}$$

där $Q = \beta a B \hbar$.

5. Antag att Coulombpotentialerna i en Heliumatom ersätts med harmoniska oscillatorpotentialer så att Hamiltonoperatoren för de två elektronerna i positionerna $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$ blir

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{r_1}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{r_2}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r_2^2 - \frac{\lambda}{4}m\omega^2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2$$

där $\lambda > 0$ är en konstant. Beräkna grundtillståndsenergin (a) exakt och (b) med första ordningens störningsteori. Jämför resultaten.

Ledning: sätt $\mathbf{u} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/\sqrt{2}$, $\mathbf{v} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/\sqrt{2}$.

(a) Variabelbytet ges av

$$r_1^2 + r_2^2 = u^2 + v^2$$

och

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 = v^2/2$$

samt

$$\nabla_{r_1}^2 + \nabla_{r_2}^2 = \nabla_u^2 + \nabla_v^2$$

I $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ blir Hamiltonoperatoren

$$H = H_u + H_v$$

där

$$H_u = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_u^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 u^2$$

$$H_v = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_v^2 + \frac{1}{2}m(1 - \lambda)\omega^2 v^2$$

Dessa har de kända energinivåerna för en tredimensionell HO: $E = (n_x + n_y + n_z + 3/2)\hbar\omega$. Detta ger den exakta grundtillståndsenergin

$$E_0 = (3/2)\hbar\omega(1 + \sqrt{1 - \lambda})$$

(b) Störningsräkning:

$$E_0^1 = -\frac{1}{2}m\lambda\omega^2 \langle 0|v^2|0 \rangle$$

där

$$\langle 0|v^2|0 \rangle = \langle 0|v_x^2|0 \rangle + \langle 0|v_y^2|0 \rangle + \langle 0|v_z^2|0 \rangle$$

Det spelar ingen roll om variabeln heter v_x, v_y, v_z eller x , resultatet blir samma:

$$\langle 0|x^2|0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0|(a^\dagger + a)^2|0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0|2N + 1|0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

Alltså blir

$$\langle 0|v^2|0 \rangle = \frac{3\hbar}{2m\omega}$$

Första ordningens korrektion blir

$$E_0^1 = -\frac{1}{2}m\lambda\omega^2 \frac{3\hbar}{2m\omega} = -\frac{3}{4}\lambda\hbar\omega$$

Grundtillståndsenergin med första ordningens störningsräkning blir

$$E_0 \approx E_0^0 + E_0^1 = 3\hbar\omega - \frac{3}{4}\lambda\hbar\omega$$

Taylorutveckling av den exakta grundtillståndsenergin ger

$$E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega(1 + \underbrace{\sqrt{1-\lambda}}_{\approx 1-\lambda/2}) \approx 3\hbar\omega - \frac{3}{4}\lambda\hbar\omega$$

Som väntat stämmer första ordningens störningsräkning med den exakta lösningen utvecklat till första ordningen.