

Lösningssförslag till Tentamen i Modern Fysik (SH1012/SH1013) 08.00-13.00, 2014-05-27, KTH, Stockholm

Tentamen består av 8 problem som vardera ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 20 poäng. Betyget baseras på uppnådd poäng (efter tillägg av 0.5 bonuspoäng per godkänd inlämningsuppgift, dvs maximalt 4 bonuspoäng). Betygskriterierna är följande:

A:36-40, B:32-35, C:28-31, D:24-27, E:20-23, Fx:18-19, F:0-17

1. Isotopen ^{226}Ac kan sönderfalla på tre olika sätt: β^+ -sönderfall, β^- -sönderfall, och α -sönderfall. Beskriv schematiskt vad som händer (vilka partiklar som skickas ut från atomkärnan i respektive fall) och visa vilken dotterkärna vi får i vart och ett av de tre sönderfallen [3 p]. För α -sönderfallet: utgå från atomära massor och beräkna Q -värdet samt alfapartikelns energi [2 p].

Lösning:

Vi har för de tre sönderfallen:

$$\beta^- : {}^A_Z\text{X}_N \rightarrow {}^A_{Z+1}\text{Y}_{N-1} + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\beta^+ : {}^A_Z\text{X}_N \rightarrow {}^A_{Z-1}\text{Y}_{N+1} + e^+ + \nu_e$$

$$\alpha : {}^A_Z\text{X}_N \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\text{Y}_{N-2} + {}^4_2\text{He}_2.$$

Vi ser i periodiska systemet att grundämnet Ac har atomtalet, dvs protontalet, 89. Vi har $N = A - Z$ och får på så sätt neutrontalet för ^{226}Ac ; $N = 226 - 89 = 137$. Även dotternuklidernas grundämnessymbol fås från periodiska systemet genom att titta på protontalet Z för de olika fallen. Vi får:

$$\beta^- : {}^{226}_{89}\text{Ac}_{137} \rightarrow {}^{226}_{90}\text{Th}_{136} + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\beta^+ : {}^{226}_{89}\text{Ac}_{137} \rightarrow {}^{226}_{88}\text{Ra}_{138} + e^+ + \nu_e$$

$$\alpha : {}^{226}_{89}\text{Ac}_{137} \rightarrow {}^{222}_{87}\text{Fr}_{135} + {}^4_2\text{He}_2.$$

De tre dotterkärnorna blir alltså; $^{226}\text{Th}(\beta^-)$, $^{226}\text{Ra}(\beta^+)$, och $^{222}\text{Fr}(\alpha)$.

Q_α -värdet motsvaras av skillnaden i bindningsenergi före och efter sönderfallet och motsvarar därför skillnaden i massa före och efter sönderfallet. Elektronernas massor försvinner vid subtraktionen så vi kan använda atomära massor. Med hjälp av tabellen för atomära massor får vi.

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \Delta mc^2 = [m(^{226}\text{Ac}) - m(^{222}\text{Fr}) - m(^4\text{He})] c^2 = \\ &= (226.026098 - 222.017551 - 4.002603) \cdot 931.502 \text{ [MeV]} = \\ &= 5.537 \text{ [MeV]}. \end{aligned}$$

Masstabellen anger massorna i atomära massenheter, [u], och vi har använt omvandlingsfaktorn $1 \text{ u} = 931.502 \text{ MeV}/c^2$.

Förhållandet mellan Q_α -värdet och alfapartikelns kinetiska energi kan härledas genom rörelsemängdens och energins bevarande, där vi betraktar alfapartikelns och dotterkärnans massor; m_α respektive M . Förhållandet ger här:

$$E_\alpha = \frac{Q_\alpha}{1 + \frac{m_\alpha}{M}} = \dots = 5.439 \text{ [MeV]}$$

Vi ser att alfapartikelns tar med sig huvuddelen av energin från sönderfallet.

2. Elsa, 91 år, har tjock-TV. För att få henne att skaffa en ny dyr OLED-TV så försöker hennes barnbarn dilla i henne att det kommer farliga röntgenstrålar från den gamla TV-apparaten. Elsa som är F-42:a (Fibonacci) ger sig dock inte så lätt. På katodstråleröret står det 3000 V, och hon vet att elektronerna som accelereras med den spänningen bestämmer den maximala energin för röntgenfotonerna som genereras på insidan av tv-rutan. Bestäm gränsvåglängden (λ_{min}) på röntgenstrålningen som bildas när elektronerna träffar insidan på bildröret [2 p].

På pensionärsföreningen Lyckan får Elsa hjälp av sin kompis Olle att koppla upp sig till Internet och hon hittar efter visst besvär NIST:s tabell (se nedan). Tabellen ger uppmätta värden på absorptionskoefficienten, μ , för fotoner motsvarande den exponentiella ($I = I_0 e^{-\mu x}$) absorptionen i glas. Elsa vet dessutom att TV-rutan är ca 5 mm tjock. Hon kan sedan räkna lite och därpå läxa upp sina barnbarn. På samma sätt som Elsa, beräkna den ungefärliga andelen röntgenfotoner som penetrerar TV-rutan [3 p].

Energi [keV]	μ [cm^{-1}]
1.0000	3.1640e+03
1.5000	1.1520e+03
2.0000	1.5000e+03
3.0000	5.1230e+02
4.0000	2.3550e+02
5.0000	1.2600e+02
6.0000	7.5000e+01
8.0000	3.2690e+01
10.0000	1.7050e+01
20.0000	2.2970e+00
30.0000	7.9870e-01
40.0000	4.3410e-01
50.0000	3.0220e-01

Lösning:

Då elektronerna accelereras i ett spänningsgap på 3000 Volt så får de energin 3000 eV. Då de träffar TV-rutans insida bromsar de snabbt in och en del av deras energi blir bromsstrålning (ett slags röntgenstrålning). Bromsstrålningen energi fördelar sig över ett kontinuerligt energiområde. Den maximala energin på de röntgenfotoner som genereras får vi då hela elektronens energi övergår till en foton. Således är den maximala fotonenergin 3000 eV. Den motsvarande våglängden (såsom beskrivet av Einstein) är då: $\lambda = c/\nu = hc/E = 4.13570 \cdot 10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^8 / (3 \cdot 10^3) \text{ [m]} = 4.1357 \cdot 10^{-10} \text{ [m]}$, dvs ca 0.41 nm.

För absorptionen kan vi använda tabellvärdet för 3 kV, dvs $\mu = 5.123 \cdot 10^2 \text{ [cm}^{-1}\text{]}$. Andelen, R , av fotoner med energin 3 kV som penetrerar rutan kan då skrivas:

$$R = I/I_0 = e^{-0.5 \cdot 5.123 \cdot 10^2} = e^{-256.15}.$$

Vi ser att detta är ett mycket litet tal, nära 0. Exekverat på tillräckligt kapabel miniräknare så får vi $R = 5.7 \cdot 10^{-112}$. Det är uppenbart att inga fotoner kommer att penetrera rutan. Elsa behåller således sin tjock-TV.

3. En partikel med massan m befinner sig i ett bundet tillstånd i en endimensionell potential. Vågfunktion har den (onormerade) formen:

$$\psi(x) = \begin{cases} A \cdot x e^{-m\omega x^2/2\hbar} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Normera vågfunktionen, dvs bestäm konstanten A [1 p]. Ta fram funktionen $V(x)$ för potentialen och rita upp den. Beräkna även energin E för vågfunktionen [4 p].

Lösning:

Vågfunktionen $\psi(x)$ är lika med 0 för $x < 0$. Således kan vi skriva normeringsvillkorets integral med start i $x = 0$:

$$\int_0^\infty |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

Vi löser integralen:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^2 e^{-m\omega x^2/\hbar} dx &= \left[a \equiv \frac{m\omega}{\hbar} \right] = \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = [\text{Beta}; n = 2k; a > 0] = \\ &= \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}a^k} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = [k = 1] = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \end{aligned}$$

Vi får nu för normeringskonstanten, A :

$$\begin{aligned} A^2 &= 4\pi^{-1/2} a^{3/2} \\ A &= 2a^{\frac{3}{4}} \pi^{-\frac{1}{4}} = 2\pi^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

För den andra delen av uppgiften börjar vi med att skriva upp den tidsberoende Schrödingerekvationen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

Vi sätter nu in vår vågfunktion; $\psi = A x e^{-ax^2/2}$. Men som förberedelse så deriverar vi ψ 2ggr:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = A \left[e^{-ax^2/2} + x(-ax)e^{-ax^2/2} \right] = A \left[e^{-ax^2/2} - ax^2 e^{-ax^2/2} \right] = A e^{-ax^2/2} [1 - ax^2].$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} &= A e^{-ax^2/2} (-ax)(1 - ax^2) + A e^{-ax^2/2} (-2ax) = A e^{-ax^2/2} x [(-a)(1 - ax^2) - 2a] = \\ &= A e^{-ax^2/2} x [(-a + a^2x^2 - 2a)] = \psi(x) \cdot (a^2x^2 - 3a). \end{aligned}$$

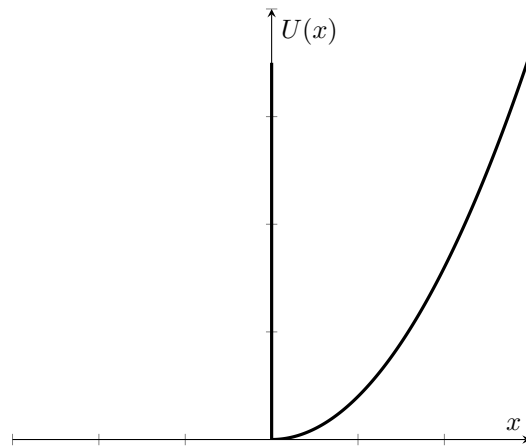
Vi skriver nu upp Schrödinger ekvationen med ψ och dess andraderivata insatt:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \psi(x) \cdot (a^2x^2 - 3a) + U(x)\psi(x) &= E\psi(x) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot (a^2x^2 - 3a) + U(x) &= E \end{aligned}$$

Eftersom energin i högerledet är oberoende av x så måste E vara lika med de konstanta termerna i vänsterledet. Dessutom måste x^2 -termerna i vänsterledet bli lika med 0, vilket innebär att $U(x)$ måste bero på x^2 . Vi får lösningar för E och $U(x)$ således:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot (-3a) = \frac{3\hbar^2 a}{2m} = \frac{3\hbar\omega}{2} \\ U(x) &= \frac{\hbar^2}{2m} a^2 x^2 = \frac{m\omega^2}{2} x^2 \end{aligned}$$

Den uppmärksamme tentanden noterar att potentialen motsvarar den kvantmekaniska *harmoniska oscillatorpotentialen* som har energilösningarna $E = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ med $n = 1, 2, \dots$. Vår vågfunktion motsvarar alltså (i $x > 0$) första exciterade tillståndet i den vanliga harmoniska oscillatorn. I vår potential är dock $U(x)$ oändlig för $x < 0$ (det vet vi eftersom vågfunktionen försvinner där). Därför försvinner de lösningar som inte är 0 vid $x = 0$. Denna vågfunktion är därför grundtillståndet i vår potential.



4. Det för människor synliga spektrumet sträcker sig från violett (ca 400 – 450) via blått (450 – 495), grönt (495 – 570), gult (570 – 590), orange (590 – 620) till rött (620 – 700). En vätelampa (i vilken ständigt ett stort antal exciterade tillstånd slumpmässigt populeras och därefter de-exciteras) lyser med en vacker färg. Men vilken färg är det? Visa vilka övergångar i atomärt väte som ligger i det synliga området 400 – 700 nm och beskriv den färg de tillsammans borde ge [5 p].

Lösning:

För väteatomens energier har vi:

$$E_n = \frac{-1 \cdot 13.6 \text{ [eV]}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

Skillnaden i energi mellan två nivåer blir då:

$$\Delta E = 13.6 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \text{ [eV]}, \quad n_1 = 1, 2, 3, \dots; \quad n_2 = 2, 3, 4, \dots;$$

Här motsvarar n_1 den lägre nivån och n_2 den övre nivån. Vi har $\lambda = c/\nu = hc/E$. Om vi börjar med $n_1 = 1$ och räknar ut λ för $n_2 = 2, 3, 4, \dots$ så får vi $\lambda = 122, 103, 97, \dots$ [nm]. Vi ser att vi aldrig kommer att få våglängder inom det synliga området med $n_1 = 1$.

Härnäst sätter vi $n_1 = 2$ och räknar ut λ för $n_2 = 3, 4, 5, \dots$. Då får vi $\lambda = 657, 487, 434, \dots$ [nm]. Alla dessa övergångar motsvarar synligt ljus. Vi fortsätter med $n_1 = 2$ och $n_2 = 6, 7, 8, \dots$ och får då: $\lambda = 411, 397, 389, \dots$ [nm]. Om gränsen för synligt ljus går vid 400 nm så får vi alltså övergångar i synligt ljus för $n_1 = 2$ och $n_2 = 3, 4, 5, 6$.

Vi bör också testa högre värden för n_1 . För $n_1 = 3$ och $n_2 = 4, 5, 6, \dots$ får vi $\lambda = 1877, 1283, 1095, \dots$ [nm]. Vi ser att våglängden minskar med ökande n_2 . Gränsen går förstås då $n_2 \rightarrow \infty$, då vi får: $\Delta E = \left(\frac{13.6}{3^2} \right) \text{ [eV]}$ och $\lambda = 821 \text{ nm}$. Således inget synligt ljus för $n_1 = 3$. På motsvarande sätt ser man att denna gräns ligger vid allt längre våglängd för ökande n_1 .

Sammanfattningsvis: Vi har synligt ljus endast för övergångarna $n_1 = 2$ och $n_2 = 3, 4, 5, 6$. Detta är (början på) den s.k. *Balmerserien*. Våglängderna i detta synliga

Ljus är alltså $\lambda = 657, 487, 434, 411$ [nm]. Vi får alltså en *röd* linje vid 657 nm en *blå* linje vid 487 nm samt ett par *violetta* linjer vid 434 respektive 411 nm. Det sammantagna intrycket blir en vacker lila färg.

5. I ett experiment vid CERN accelererade studerades π^+ -partiklar. Dessa har en vilomassa på $139.6 \text{ MeV}/c^2$ och sönderfaller till en anti-myon, $\bar{\mu}^+$, och en myonneutrino, ν_μ . I experimentet ville man mäta halveringstiden för detta sönderfall. Vid hastigheten $v/c = 0.99995$ så sönderföll 50% av π^+ -partiklarna under en mätsträcka på 540 meter. Beräkna halveringstiden [5 p].

Lösning:

I laboratoriesystemet uppfattar vi partikelns halveringstid som:

$$t_{1/2}^{lab} = \frac{l_{1/2}^{lab}}{v} = \frac{540}{0.99995 \cdot 3 \cdot 10^8} = 1.80 \cdot 10^{-6} \text{ [s]}.$$

Halveringstiden i π^+ -partikelns eget system är då:

$$t_{1/2} = \frac{t_{1/2}^{lab}}{\gamma} = 1.80 \cdot 10^{-6} \sqrt{1 - 0.99995^2} = 1.80 \cdot 10^{-8} \text{ [s]}.$$

Vi får en halveringstid på 18.0 ns.

6. En väteatom befinner sig i tillståndet $n = 2, l = 1$. Beräkna elektronens mest sannolika avstånd från atomkärnan. [5 p]

Lösning:

Elektronens avstånd från atomkärnan beror endast på den radiella vågfunktionen, $R(r)$. Den radiella sannolikhetsfunktionen, $P(r)$, kan för det aktuella tillståndet skrivas:

$$P(r) = r^2 |R_{2,1}(r)|^2 = r^2 \frac{1}{(2a_0)^3} \frac{r^2}{3a_0^2} e^{-r/a_0} = \frac{r^4}{24a_0^5} e^{-r/a_0}.$$

Vi deriverar nu $P(r)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} P(r) &= \frac{1}{24a_0^5} \frac{d}{dr} \left[r^4 e^{-r/a_0} \right] = \\ &= \frac{1}{24a_0^5} \left[4r^3 e^{-r/a_0} + r^4 \left(-\frac{1}{a_0} \right) e^{-r/a_0} \right] = \\ &= \frac{1}{24a_0^5} e^{-r/a_0} \left[4r^3 - \frac{r^4}{a_0} \right] \end{aligned}$$

För att få det mest sannolika avståndet, r_0 , så sätter vi derivatan för $P(r)$, med avseende på r , lika med 0:

$$\begin{aligned} \frac{1}{24a_0^5} e^{-r_0/a_0} \left[4r_0^3 - \frac{r_0^4}{a_0} \right] &= 0 \\ 4r_0^3 - \frac{r_0^4}{a_0} &= 0 \\ r_0 &= 4a_0. \end{aligned}$$

Det mest sannolika avståndet för en elektron i det aktuella tillståndet $4a_0$.

7. Högenergetiska gammafotoner kan växelverka med materia på huvudsakligen tre olika sätt, *fotoelektrisk effekt*, *Comptonspridning*, och *parbildning*. En gammafoton med energin 823 keV infaller mot och växelverkar med en bit bly. Vilken/vilka av

de tre processerna är möjliga i detta fall? Motivera ditt svar och förklara vad som händer i de olika fallen [2 p].

En gammafoton med energin 3114 keV infaller mot en *fri* elektron (som befinner sig i vila) i vakuum Vilken/vilka processer av de tre nämnda ovan är möjliga i detta fall? För varje fall som du anser är möjligt (om något), visa tydligt vilka energier och rörelsemängder de olika partiklarna har. [3 p].

Lösning:

I första fallet (blybit) så är parbildning är inte möjligt eftersom vi för att bilda positron/elektron-paret behöver energin: $E = (m_{e^-} + m_{e^+})c^2 = 2 \cdot 511 \text{ keV} = 1022 \text{ keV}$. Detta är mer energi än den inkommande fotonen kan bidra med. **Fotoelektrisk effekt och Comptonspridning är båda möjliga** eftersom fotonens energi vida överstiger de atomära elektronernas bindningsenergier. Elektronerna slås ut från atomerna i dessa två processer. I den fotoelektriska effekten så tar atomerna en del av rekylenergin.

I fallet med en fri elektron så är Comptonspridning möjlig. Där kan vi följa de gängse formelerna för vinklar, energier och rörelsemängd. Exempelvis har vi vid 180° spridning av den inkommande fotonen följande energi för den spridda fotonen:

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{3114 \text{ keV}} = \frac{1 - \cos(180^\circ)}{m_e c^2} = \frac{2}{m_e c^2} = \frac{2}{511 \text{ keV}}$$

$$E' = \frac{1}{\frac{2}{511 \text{ keV}} + \frac{1}{3114 \text{ keV}}} = 236 \text{ keV}$$

Elektronen får resten av energin, dvs $3114 - 236 = 2878 \text{ keV}$. Eftersom formelerna för Comptonspridning bygger på bevarandet av energi och rörelsemängd så är allt i sin ordning även vad gäller rörelsemängderna.

Vid fotoelektrisk effekt för en fri elektron ska fotonen försvinna och all energi gå till elektronen. Men detta är inte möjligt. Vi har nämligen för fotonens energi: $E_f = pc$, och samtidigt för elektronens energi: $E_e = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$. Om $E_f = E_e$ så måste termen $m_0^2 c^4$ vara 0 och det är den inte eftersom m_0 är elektronens vilomassa som förstås är större än 0.

Parbildning vid en fri elektron är lite knepigare. Denna process innebär att fotonen försvinner, att ett nytt elektron-positron-par bildas, och att den ursprungliga elektronen är kvar. Vi behöver undersöka om detta är möjligt underbevarande av rörelsemängd och energi. Vi börjar med att tänka oss ett fall där den inkommande energin räcker för att skapa ett elektron/positron-par och dessutom räcker för att ge de tre partiklarna tillräcklig hastighet för att rörelsemängden bevaras. Enklast möjliga fall (med minimal energi) blir då de tre partiklarna efter processen rör sig tillsammans med samma konstanta hastighet, v , i samma riktning som den inkommande fotonen hade. Vi kan försöka räkna denna (minsta nödvändiga) hastighet är och därur få en gräns för den nödvändiga energin.

De tre partiklarna har alla samma massa m_e . Deras gemensamma kinetisk energi ska sättas lika med den totalt tillförda energin, dvs fotonens energi $h\nu$ minus energin $2m_e c^2$ som krävs för att skapa elektron/positron-paret:

$$3m_e c^2 (\gamma - 1) = 3m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = h\nu - 2m_e c^2$$

$$h\nu + m_e c^2 = \frac{3m_e c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Rörelsemängden ska också sättas lika före och efter processen:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{3m_e v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Vi har nu två ekvationer med två okända, nämligen $h\nu$ och v . Efter lite räkningar får vi $h\nu = 4m_e c^2 = 2.044\text{MeV}$ och $\frac{v}{c} = \frac{4}{5}$. (Det blir en lösning $\frac{v}{c} = 1$ också, men det är ju omöjligt för $m_e > 0$.)

Vi ser nu att för energier lägre än 2.044MeV kan vi inte uppfylla villkoren. (Detta skiljer sig således för fallet då parbildning sker i närheten av en atomkärna som pga av sin stora massa kan få tillräcklig rörelsemängd utan att ta med sig så mycket energi. I det fallet ligger gränsen för parbildning nära $h\nu = 2m_e c^2 = 1.022\text{MeV}$.)

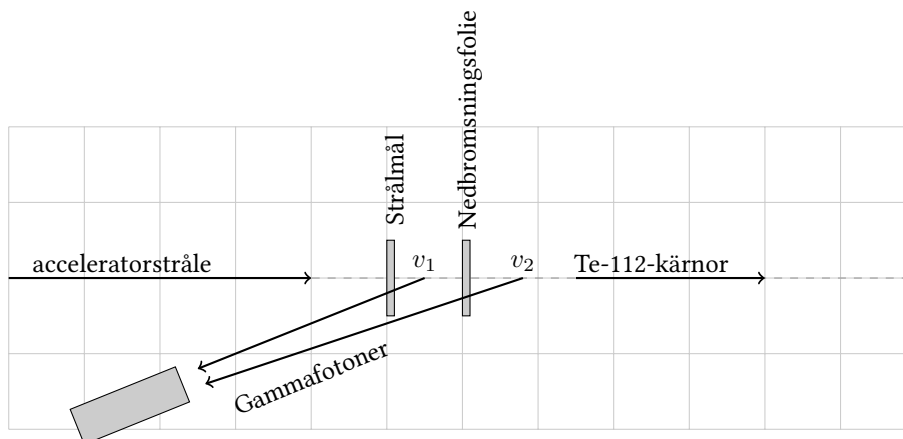
Vi tänkter oss nu detta gränsfall där en foton med energin $h\nu = 4m_e c^2 = 2.044\text{MeV}$ kommit in mot den stillastående (fria) elektronen och efter processen de tre partiklarna som tillsammans rör sig med hastigheten $\frac{v}{c} = \frac{4}{5}$. Vi förflyttar oss nu till det inertialsystem som innebär att rörelsemängden är 0. I detta fall är det ett system som rör sig med $\frac{v}{c} = \frac{4}{5}$ i förhållande till labsystemet. I det rörliga systemet så ser processen ut såhär: *en foton från ena hållet möter en elektron som kommer från andra hållet. Efter processen så ligger tre partiklar stilla tillsammans i en punkt.*

För varje energi (lika med eller större än $4m_e c^2$) på den inkommande fotonen så kan vi hitta ett inertialsystem sådant att rörelsemängden fortfarande är 0 (i det rörliga systemet). För högre fotonenergier än gränsvärdet så kommer detta innebära att de tre partiklarna inte sitter stilla (i det rörliga systemet) utan åker ut från origo på ett sätt som gör att rörelsemängden totalt blir 0. Vi kan exempelvis låta dem alla gå med samma hastighet isotropt, dvs i 120° vinkel mot varandra (i det rörliga systemet). **Från labsystemets synvinkel så innebär detta att en högre fotonenergi än 2.044MeV (tex energin i vårt problem, dvs 3114keV) tillåter parbildningsprocessen mot en fri elektron.**

Sammanfattningsvis så är Comptonspridning och parbildning, men inte fotoeffekt, tillåtna i det fria fallet.

8. Ett team kärnfysiker vill mäta halveringstiden för 2^+ -tillståndet i ^{112}Te . I en kärnreaktion skapas nukliden ^{112}Te genom att en strålmålsfolie (i origo) bombarderas av en acceleratorstråle. ^{112}Te -kärnorna skapas i folien i ett exciterat, kortlivat, tillstånd ($I^\pi = 2^+$), 689keV över grundtillståndet ($I^\pi = 0^+$). Kärnorna har hög hastighet och lämnar omedelbart folien för att färdas med en konstant hastighet, v_1 , i positiva x -riktningen i vakuum. Vid $x = 100\text{ }\mu\text{m}$ sitter en annan tunn folie som bromsar ner kärnorna till viss del. De färdas sedan vidare längs x -axeln med den lägre, konstanta hastigheten v_2 . Gammafotoner som motsvarar $2^+ \rightarrow 0^+$ -övergången skickas ut spontant då det exciterade tillståndet sönderfaller. En detektor detekterar fotoner som går snett bakåt, i $\theta = 158^\circ$ mot den positiva x -axeln. Avståndet från strålmålet till detektorn är ca 30 cm (avsevärt större än den korta distans där sönderfallet sker), så vinkeln θ kan anses konstant i detta fall.

Två toppar med energierna 649keV och 657keV detekteras, med den relativa intensiteten $I(649)/I(657) = 0.63$. De två topparna motsvarar de Dopplerskiftade energierna då $2^+ \rightarrow 0^+$ -sönderfallet sker före resp. efter nedbromsningsfolien. Bestäm hastigheterna v_1 och v_2 [2 p]. Bestäm halveringstiden hos 2^+ -tillståndet i ^{112}Te [3 p].



Lösning:

Vi utgår ifrån formeln för Dopplereffekt och skriver om den lite:

$$\nu = \frac{\nu_0}{\gamma(1 + \frac{v}{c} \cos \theta)}$$

$$\frac{E_0}{E} = \frac{h\nu_0}{h\nu} = \frac{\nu_0}{\nu} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{(1 + \frac{v}{c} \cos \theta)}$$

Geometrin är sådan att vi har $\theta = 180^\circ - 158^\circ = 22^\circ$.

Vi söker nu $\frac{v_1}{c}$ (före nedbromsningsfolien) och $\frac{v_2}{c}$ (efter nedbromsningsfolien). Vi har $\frac{E_0}{E_1} = \frac{689}{649}$ och $\frac{E_0}{E_2} = \frac{689}{657}$ (Energiskillnaden pga Dopplereffekten är ju större för den högre hastigheten.) Vi ser att det blir en andragradsekvation som vi enkelt kan lösa och får efter lite räknande: $\frac{v_1}{c} = 0.0641$ och $\frac{v_2}{c} = 0.0511$, dvs $v = 1.92 \cdot 10^7$ [m/s] resp. $v = 1.53 \cdot 10^7$ [m/s]. Vid dessa, relativt låga, hastigheter så kan vi om vi vill räkna med klassisk kinematik.

För att lösa andra delen av uppgiften så noterar vi först att det är hastigheten mellan folierna, dvs $\frac{v_1}{c}$, som är av vikt. Vi tänker oss att ett stort antal kärnor, N_0 har skapats i strålmålsfolien. Antalet kärnor som ännu inte sönderfallit efter flygtiden t betecknar vi $N(t)$. Sönderfallet sker exponentiellt, alltså har vi $N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$. Andelen kärnor som sönderfaller före tiden t är således $1 - \frac{N(t)}{N_0} = 1 - \exp(-\lambda t)$. Vi känner till att denna andel är $\frac{I_1}{I_1 + I_2} = \frac{(I_1/I_2)}{(I_1/I_2) + 1} = \frac{0.63}{0.63 + 1} = 0.3865$ då kärnorna når nedbromsningsfolien. Vi kan också räkna ut tiden t vid den punkten eftersom vi har avståndet $x = 100 \mu\text{m}$ och hastigheten $\frac{v_1}{c}$. Vi får nu:

$$1 - e^{-\lambda t} = 0.3865$$

$$e^{-\lambda t} = 0.6135$$

$$\lambda = \frac{-\ln(0.6135)}{t}$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \frac{t \cdot \ln(2)}{-\ln(0.6135)} = \frac{(x/v_1) \cdot \ln(2)}{-\ln(0.6135)} = 7.38 \cdot 10^{-12} \text{ [s]}.$$

Halveringstiden på det exciterade tillståndet är alltså 7.38 ps.