

TENTAMEN, DEL 2
SF1544
NUMERISKA METODER, GRUNDKURS
Tisdag 3 juni 2025 kl 14.00-17.00

Rättas endast om Del 1 är godkänd.

Betygsgräns: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Maximalt antal poäng 50.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas detaljerat. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

Skriv namn och personnummer på varje blad. Skriv inte på baksidan av pappret.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

P1. En kaninpopulation $u(t)$ växer med tiden t enligt en logistiskt tillväxtmodell

$$\frac{du}{dt} = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right), \quad u(0) = u_0.$$

Bärförmågan K och tillväxthastigheten r antas vara konstanta. Denna ekvation har då en exakt lösning som ges av

$$u(t) = \frac{Ku_0}{u_0 + (K - u_0)e^{-rt}}.$$

- (6p) **(a)** Vid tiden T minskar vegetationstillgången på grund av överbete, vilket leder till att den maximala populationen som kan överleva minskar enligt

$$u_{\max}(T) = \frac{A}{T + 1}, \quad A > 0.$$

Här representerar A den initiala vegetationstillgången vid $t = 0$.

Formulera Newtons metod för att bestämma tiden T då kaninpopulationen når denna resursbegränsning. Inkludera en tydlig definition av alla ingående storheter och funktioner som används i metoden.

Lösningsförslag: Vi söker tiden T då $u(T) = u_{\max}(T)$, dvs vi kan formulera Newton-funktionen som

$$f(T) = u(T) - u_{\max}(T) = \frac{Ku_0}{u_0 + (K - u_0)e^{-rT}} - \frac{A}{T + 1},$$

där vi söker T så att $f(T) = 0$. Givet en startgissning T^0 ges Newtons metod av

$$T^{n+1} = T^n - \frac{f(T^n)}{f'(T^n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Vi behöver även derivatan $f'(T)$ och använder dels differentialekvationen och dels deriverar uttrycket för $u_{\max}(T)$ med avseende på T :

$$\begin{aligned} f'(T) &= \frac{d}{dT}(u(T) - u_{\max}(T)) = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) + \frac{A}{(T + 1)^2} \\ &= \frac{rKu_0}{u_0 + (K - u_0)e^{-rT}} \left(1 - \frac{u_0}{u_0 + (K - u_0)e^{-rT}}\right) + \frac{A}{(T + 1)^2}. \end{aligned}$$

- (5p) (b) Antag att det finns osäkerhet i initiala vegetationstillgången A , betecknad E_A , och i bärformågan K , betecknad E_K . Beskriv i detalj hur du kan använda metoden i (a) tillsammans med en experimentell störningsanalys för att bestämma osäkerheten i tiden T , betecknad E_T . Du kan anta att A, K, E_A, E_K är kända.

Lösningförslag:

- Använd Newtons metod ovan med givna värden på A och K för att beräkna ett referensvärde T_{ref} . Detta är den ostörda lösningen.
- Använd sedan A och $K + E_K$ i metoden för att beräkna en lösning T_K där parametern K störts uppåt (och A inte störts).
- Använd $A + E_A$ och K i metoden för att beräkna en lösning T_A där parametern A störts uppåt (och K inte störts).
- Osäkerheten i T beräknas sedan enligt $E_T = |T_K - T_{ref}| + |T_A - T_{ref}|$.

- (5p) (c) Antag nu att det finns en rävpopulation $v(t)$ som jagar kaniner. Systemet kan beskrivas som

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - puv, \\ \frac{dv}{dt} &= cuv - dv,\end{aligned}$$

där p är en predatorskoefficient, c en tillväxtkoefficient för rävar beroende på kaniner och d en dödscoefficient för rovdjur. Initialvillkoren ges av $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$. Systemet ovan går inte att lösa analytiskt utan lösningen behöver approximeras med hjälp av en numerisk metod. Formulera Euler framåt för systemet. Inkludera en tydlig definition av alla ingående storheter som används i metoden.

Lösningförslag: För att kunna ställa upp Euler framåt definierar vi en vektorvärd funktion $\mathbf{F}(t, u, v) = \begin{pmatrix} f_1(t, u, v) \\ f_2(t, u, v) \end{pmatrix}$ som innehåller högerledet av systemet,

$$\begin{aligned}f_1(t, u, v) &= ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - puv, \\ f_2(t, u, v) &= cuv - dv.\end{aligned}$$

Vi definierar även Lösningsektorn till systemet $\mathbf{y} = (u, v)^T$ och en numerisk approximation $\mathbf{Y}_i = (U_i, V_i)^T \approx (u(t_i), v(t_i))^T$, där $t_i = ih$, $i = 1, 2, \dots$ och h är steglängden. Initialvillkoren ges av $\mathbf{Y}_0 = (U_0, V_0)^T = (u(0), v(0))^T = (u_0, v_0)^T$, och Euler framåt ges av

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + h \cdot \mathbf{F}(t_i, \mathbf{Y}_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

alternativt utskrivet

$$\begin{pmatrix} U_{i+1} \\ V_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_i \\ V_i \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} f_1(t_i, U_i, V_i) \\ f_2(t_i, U_i, V_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_i \\ V_i \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} rU_i \left(1 - \frac{U_i}{K}\right) - pU_iV_i \\ cU_iV_i - dV_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots$$

P2. Följande differentialekvation är given

$$u''(t) + 2u'(t) + 4u(t) = t \quad u(0) = 2 \quad u(1) = \alpha \quad (1)$$

där α är en okänd parameter som bestäms från villkoret

$$\int_0^1 u(t) dt = \alpha \quad (2)$$

- (10 p) **(a)** Dela in intervallet $0 \leq t \leq 1$ i 4 delintervall och approximerar differentialekvationen (1) och integralekvationen (2) med metoder som har minst noggrannhetsordning 2. Resultatet blir ett linjärt ekvationssystem. Skriv i detalj upp ekvationerna som utgör det linjära ekvationssystemet samt ange systemet på formen $A\vec{x} = \vec{b}$. Du behöver inte lösa systemet med var noga med att definiera alla variabler du använder.

Lösningsförslag:

Om vi delar in t -axeln i 4 delintervall mellan $t = 0$ och $t = 1$ får vi att $h = 1/4$ och $t_i = ih$ där $i = 0, 1, 2, 3, 4$. En approximation av (1) med andra ordningens centrala differenser ger oss

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + 2\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + 4u_i = t_i \quad \text{för } i = 1, 2, 3$$

där $u_i \approx u(x_i)$. Denna kan vi nu skriva om på formen

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h}\right) u_{i-1} + \left(\frac{-2}{h^2} + 4\right) u_i + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}\right) u_{i+1} = t_i \quad \text{för } i = 1, 2, 3$$

Detta utgör de första tre ekvationerna i ekvationssystemet

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h}\right) u_0 + \left(\frac{-2}{h^2} + 4\right) u_1 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}\right) u_2 = t_1$$

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h}\right) u_1 + \left(\frac{-2}{h^2} + 4\right) u_2 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}\right) u_3 = t_2$$

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h}\right) u_2 + \left(\frac{-2}{h^2} + 4\right) u_3 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}\right) u_4 = t_3$$

Om vi sätter in randvillkoren får vi

$$\left(\frac{-2}{h^2} + 4\right) u_1 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}\right) u_2 = t_1 - \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h}\right) u_0 \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h}\right) u_1 + \left(\frac{-2}{h^2} + 4\right) u_2 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}\right) u_3 = t_2 \quad (4)$$

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h}\right) u_2 + \left(\frac{-2}{h^2} + 4\right) u_3 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h}\right) \alpha = t_3 \quad (5)$$

Systemet har fyra obekanta u_1, u_2, u_3 och α men endast tre ekvationer. Den fjärde ekvationen får vi från integralvillkoret (1). Om vi approximerar integralen med trapetsregeln får vi ekvationen

$$h \left(\frac{u_0}{2} + u_1 + u_2 + u_3 + \frac{u_4}{2} \right) = \alpha$$

som vi kan skriva om som

$$h \left(u_1 + u_2 + u_3 + \frac{\alpha}{2} \right) - \alpha = -h \frac{u_0}{2} \quad (6)$$

Ekvationerna (3)-(6) utgör det linjära ekvationssystemet som vi behöver lösa för att bestämma u_1, u_2, u_3 och α .

Vi ska även skriva systemet på formen $A\vec{x} = \vec{b}$ och vi får att

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{2}{h^2} + 4 & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h} & -\frac{2}{h^2} + 4 & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h} & -\frac{2}{h^2} + 4 & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} \\ h & h & h & \frac{h}{2} - 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \alpha \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_1 - \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h}\right) u_0 \\ t_2 \\ t_3 \\ -\frac{1}{2h} u_0 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

- (4 p) (b) Förklara med ord och formler på vilket sätt du kan kontrollera att din metod ger korrekt noggrannhetsordning vid beräkningen av variabeln α . Vilken noggrannhetsordning förväntar du dig att metoden har?

Lösningsförslag:

För att kontrollera noggrannhetsordningen vid beräkningen av α kan vi använda steglängdshalvering.

Dvs vi löser (1) och (2) enligt deluppgift a) för ett antal värden på steglängden h . Om vi börjar med $h = h_0$ så beräknar vi lösningen med $h = h_0/2$, $h = h_0/4$, $h = h_0/8$ och kontrollerar värdet på kvoterna

$$\frac{|\alpha_{h_0/2} - \alpha_{h_0}|}{|\alpha_{h_0/4} - \alpha_{h_0/2}|}, \quad \frac{|\alpha_{h_0/4} - \alpha_{h_0/2}|}{|\alpha_{h_0/8} - \alpha_{h_0/4}|} \quad \text{osv}$$

Eftersom vi förväntar oss noggrannhetsordning 2 bör kvoterna gå mot 4 för tillräckligt små värden på h .

P3. Den här uppgiften handlar till stor del om trapetsregeln, men börjar med en differensformel.

- (7p) (a) Vi vill konstruera en differensformel, $D_h^L f(x)$ på följande form

$$D_h^L f(x) = \frac{a}{h} f(x) + \frac{b}{h} f(x+h) + \frac{c}{h} f(x+2h),$$

sådan att $f'(x) - D_h^L f(x) = O(h^2)$, givet en steglängd $h > 0$ och f en oändligt deriverbar funktion. Dvs vi måste bestämma koefficienterna a , b och c så att approximationen har noggrannhetsordning 2.

Visa att koefficienterna a , b och c måste uppfylla följande ekvationssystem för att approximationen $D_h^L f(x)$ ska ha noggrannhetsordning 2:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ b + 2c &= 1 \\ b + 4c &= 0. \end{aligned}$$

Bestäm sedan a , b och c , och ange uttrycket för feltermen som är proportionell mot h^2 .

Notera att i differensformeln $D_h^L f(x)$ ovan så används funktionsvärden i x , $x + h$ och $x + 2h$. Om man istället använder funktionsvärden i x , $x - h$ och $x - 2h$ och definierar $D_h^R f(x) = -\frac{a}{h}f(x) - \frac{b}{h}f(x-h) - \frac{c}{h}f(x-2h)$, så gäller då för samma värden på a, b och c att $f'(x) - D_h^R f(x) = O(h^2)$.

Uppgiften fortsätter på nästa sida.

Lösningsförslag: Taylorutveckla termerna i $D_h^L f(x)$ kring x . Vi får

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4) \\ f(x+2h) &= f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x) + \frac{8h^3}{6}f'''(x) + O(h^4). \end{aligned}$$

Insättning i $D_h^L f(x)$ ger

$$\begin{aligned} D_h^L f(x) &= \frac{a}{h}f(x) + \frac{b}{h} \left(f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4) \right) \\ &+ \frac{c}{h} \left(f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x) + \frac{8h^3}{6}f'''(x) + O(h^4) \right), \end{aligned}$$

och vidare

$$\begin{aligned} D_h^L f(x) &= \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{h} + \frac{c}{h} \right) f(x) + \left(\frac{b}{h}h + \frac{c}{h}2h \right) f'(x) \\ &+ \left(\frac{b}{h}\frac{h^2}{2} + \frac{c}{h}\frac{4h^2}{2} \right) f''(x) + \left(\frac{b}{h}\frac{h^3}{6} + \frac{c}{h}\frac{8h^3}{6} \right) f'''(x) + O(h^3) \\ &= \frac{1}{h} (a + b + c) f(x) + (b + 2c) f'(x) + h \left(\frac{b}{2} + 2c \right) f''(x) \\ &+ h^2 \left(\frac{b}{6} + \frac{4c}{3} \right) f'''(x) + O(h^3) \end{aligned}$$

För att $D_h^L f(x)$ ska få noggrannhetsordning 2 (felet ska vara av storleksordning h^2) måste koefficienterna framför $1/h f(x)$ och $h f''(x)$ vara noll. Koefficienten framför $f'(x)$ måste vara lika med 1. Detta ger systemet

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ b + 2c &= 1 \\ b + 4c &= 0 \end{aligned}$$

Vi får att $a = 3/2$, $b = -2$, $c = 1/2$. Detta ger den ledande feltermen $\frac{h^2}{3} f'''(x)$.

- (7p) (b) Vi kan använda trapetsregeln för att approximera integralen

$$I[f] = \int_0^1 f(x)dx,$$

där f är en oändligt deriverbar funktion. Givet ett heltal N , låt steglängden för trapetsregeln vara $h = 1/N$, med punkter uniformt spridda i intervallet $[0, 1]$, så att $x_\ell = \ell h$, $\ell = 0, \dots, N$. Låt $T_h[f]$ beteckna approximationen med trapetsregeln av $I[f]$. Genom Euler Maclaurins felformel så vet vi då att följande gäller

$$I[f] = T_h[f] + \frac{h^2}{12}(f'(0) - f'(1)) - \frac{h^4}{720}(f'''(0) - f'''(1)) + O(h^6)$$

- i) Definiera $T_h[f]$, dvs ange formeln för trapetsregeln.
- ii) Ange en funktion för vilken trapetsregeln är exakt, dvs $T_h[f] = I[f]$.
- iii) Vilken noggrannhetsordning erhålls för trapetsregeln för $f(x) = e^x$?
- iv) Vilken noggrannhetsordning erhålls för trapetsregeln för $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$?
- v) Ange en funktion för vilken trapetsregeln inte är exakt men har noggrannhetsordning högre än 4.

Lösningsförslag: (i) Trapetsregeln ges av:

$$T_h[f] = \frac{h}{2}f(x_0) + hf(x_1) + \dots hf(x_{n-1}) + \frac{h}{2}f(x_n).$$

(ii) Trapetsregel är exakt för godtycklig linjär funktion, $f(x) = cx + d$, $c, d \in \mathbb{R}$. För funktionen i (iii) så har vi att $f'(0) \neq f'(1)$ och approximationen är av andra ordningen. För funktionen i (iv) så har vi att $f'(0) = f'(1)$ men $f'''(0) \neq f'''(1)$, och vi får noggrannhetsordning 4. För att få noggrannhetsordning högre än 4 så krävs både att $f'(0) = f'(1)$ och $f'''(0) = f'''(1)$. Detta gäller tex för en periodisk funktion, tex $\sin(2\pi x)$. (För periodiska funktioner har trapetsregeln spektral noggrannhet, dvs den konvergerar exponentiellt med N .)

- (6p) (c) Använd ovanstående information för att definiera en modifierad trapetsregel $\tilde{T}_h[f]$ som approximerar $I[f]$ med fjärde ordningens noggrannhet för en godtycklig oändligt deriverbar funktion f . Motivera din konstruktion och visa att den ger fjärde ordningens noggrannhet.

Lösningsförslag: För att reducera felet till fjärde ordningen så behöver vi approximera derivatorna $f'(0)$ och $f'(1)$ med andra ordningens noggrannhet, och lägga till första termen i Euler Maclaurins felformel till den modifierade trapetsregel $\tilde{T}_h$. Eftersom 0 och 1 är första respektive sista punkten på intervallet så måste vi använda de skeva stencilerna D_h^L och D_h^R , som introducerades i (a). Vi definierar

$$\begin{aligned} \tilde{T}_h[f] &= T_h[f] + \frac{h^2}{12}(D_h^L f(x_0) - D_h^R f(x_N)) \\ &= T_h[f] + \frac{h}{24}(-3f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) - f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) - 3f(x_N)). \end{aligned}$$

Vi har att $(x_0 = 0, x_n = 1)$,

$$\begin{aligned}\tilde{T}_h[f] - I[f] &= \tilde{T}_h[f] - T_h[f] + T_h[f] - I[f] \\&= \frac{h^2}{12}(D_h^L f(x_0) - D_h^R f(x_n)) + \frac{h^2}{12}(-f'(x_0) + f'(x_n)) + \frac{h^4}{720}(f'''(x_0) - f'''(x_n)) + O(h^6) \\&= \frac{h^2}{12}(D_h^L f(x_0) - f'(x_0) - (D_h^R f(x_n) - f'(x_n))) + \frac{h^4}{720}(f'''(x_0) - f'''(x_n)) + O(h^6) \\&= \frac{h^4}{36}(f'''(x_0) - f'''(x_n)) + \frac{h^4}{720}(f'''(x_0) - f'''(x_n)) + O(h^6) = O(h^4)\end{aligned}$$

där vi har använt resultatet från (a).