

Lösningar till Tentamen i Modern Fysik (SH1014)

14.00-19.00, 2019-01-14, KTH, Stockholm

Examinator: Torbjörn Bäck

Lärare: Torbjörn Bäck, Pär Olsson

Tillåtna hjälpmedel vid tentamen var: miniräknare + *Matematics Handbook Beta*.
Formelblad delades ut vid tentamen. Studenterna informerades vid tentamen om massan för π^0 -partikeln, $134,9766 \text{ MeV}/c^2$.

1. Problem:

Robin har blivit utvald att som första människa resa till en annan stjärna och far iväg i en mycket snabb raket till systemet α -Centauri AB som ligger 4.37 ljusår bort. Robin tillbringar där ett jordår för att undersöka dubbelstjärnan och exoplaneterna och åker sedan hem i samma fart som dit. Vid hemkomsten har Robin åldrats fem år.

a) Vilken fart hade raket? [3 p]

b) Hur lång tid har gått på Jorden när Robin kommit hem igen? [2 p]

Lösning:

Robins resa fram och tillbaks tar totalt 5 år ($t_R = 5 \text{ y}$) i inertialsystemet S' , inklusive ett uppehåll på ett år, så tiden som Robin upplever under sin höga fart kan vi skriva som $\Delta t' = 4 \text{ y}$. Sträckan Robin färdas är $d = 8.74 \text{ ly}$. Vi definierar $\beta = v/c$. Lorentzfaktorn är $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2} = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

a) Tiden i jordens referenssystem är $\Delta t = \gamma \Delta t'$, och eftersom avståndet Robin färdas är $d = v \Delta t$ så kan vi skriva: $d = v \gamma \Delta t' = \frac{\beta c \Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$. Detta kan vi skriva om som

$\frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \left(\frac{d}{c \Delta t'}\right)^2 = \alpha^2$, där $\alpha = \frac{d}{c \Delta t'} = \frac{8.74}{4}$. Detta blir en enkel andragradsekvation med lösningen $\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = 0.91$, och alltså är farten $v = 0.91c$.

b) Tiden på jorden blir 1 år plus den tid som resorna tog, dvs $1 + \Delta t = 1 + d/v = 1 + 8.74/0.91 = 10.6 \text{ år}$.

2. Problem:

En väteatom i sitt grundtillstånd blir exciterad av en foton med $\lambda = 121.6 \text{ nm}$.

a) Bestäm vilket tillstånd atomen hamnar i, specificera alla relevanta kvanttal. [2 p]

b) Bestäm, för det exciterade tillståndet, den radie där det är mest sannolikt att hitta elektronen. [3 p]

Lösning:

a) Energin som fotonen kan överföra till väteatomen ges av $E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eVnm}}{121.6 \text{ nm}} = 10.2 \text{ eV}$. Om detta är lika med eller större än energiskillnaden mellan vätes grundtillstånd och något eller några exciterade tillstånd kan elektronen exciteras. Energivärdena ges av $E_n = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}$ och är alltså $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ för grundtillståndet, $E_2 = -3.4 \text{ eV}$ för första exciterade tillstånd och $E_3 = -1.51 \text{ eV}$ för andra exciterade tillståndet. Vi ser att $E_1 - E_2 = 10.2 \text{ eV}$ och fotonen kan alltså excitera elektronen ett steg. Huvudkvanttalet blir alltså $n = 2$. För detta n kan bankvanttalet l anta värdena 0 och 1. Eftersom en foton har exciterat elektronen och därmed absorberats så kommer fotonens spinn att övergå till väteatomen och l -kvanttalet måste därför ändras med 1. Denna urvalsregel ger att det exciterade tillståndet blir $n = 2, l = 1$, men övriga kvanttal kan inte bestämmas. Elektronen hamnar alltså i ett $2p$ -tillstånd, i spektroskopisk notation.

b) Elektronens avstånd från atomkärnan beror endast på den radiella vågfunktionen, $R(r)$. Den radiella sannolikhetsfunktionen, $P(r)$, kan för det aktuella tillståndet skrivas:

$$P(r) = r^2 |R_{2,1}(r)|^2 = r^2 \frac{1}{(2a_0)^3} \frac{r^2}{3a_0^2} e^{-r/a_0} = \frac{r^4}{24a_0^5} e^{-r/a_0}.$$

Vi deriverar nu $P(r)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} P(r) &= \frac{1}{24a_0^5} \frac{d}{dr} [r^4 e^{-r/a_0}] = \\ &= \frac{1}{24a_0^5} \left[4r^3 e^{-r/a_0} + r^4 \left(-\frac{1}{a_0} \right) e^{-r/a_0} \right] = \\ &= \frac{1}{24a_0^5} e^{-r/a_0} \left[4r^3 - \frac{r^4}{a_0} \right] \end{aligned}$$

För att få det mest sannolika avståndet, r_0 , så sätter vi derivatan för $P(r)$, med avseende på r , lika med 0:

$$\begin{aligned} \frac{1}{24a_0^5} e^{-r_0/a_0} \left[4r_0^3 - \frac{r_0^4}{a_0} \right] &= 0 \\ 4r_0^3 - \frac{r_0^4}{a_0} &= 0 \\ r_0 &= 4a_0. \end{aligned}$$

Det mest sannolika avståndet för en elektron i det aktuella tillståndet $4a_0$.

3. Problem:

En partikel med massan m befinner sig i en endimensionell potential, $U(x)$. Partikelns vågfunktion kan skrivas:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax^2 e^{-ax} & \text{för } x > 0 \\ 0 & \text{för } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Normera vågfunktionen, dvs bestäm konstanten A . [2 p]

b) Bestäm $U(x)$ och beräkna partikels energi, E . [3 p]

Följande integral kan vara användbar: $\int_0^\infty r^m e^{-br} dr = \frac{m!}{b^{m+1}}$.

Lösning:

a) Normering i en dimension:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = A^2 \int_0^{\infty} x^4 e^{-2ax} dx = 1 \implies A = \sqrt{\frac{4a^5}{3}}$$

b) Använd den tidsberoende Schrödingerekvationen och sätt in vågfunktionen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{2}{x^2} - \frac{4a}{x} + a^2 \right] \psi(x) + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

Identifiera E och $U(x)$ med den konstanta termen, respektive de termer som beror på x :

$$E = -\frac{\hbar^2 a^2}{2m}$$

$$U(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{4a}{x} \right).$$

4. Problem:

Werner Heisenberg behöver din hjälp att uppskatta avståndet mellan de två elektronerna i ett bundet supraledande Cooperpar. Elektronernas kinetiska energi ges av Fermienergin, vilken typiskt är 10 eV. Osäkerheten i kinetisk energi kan uppskattas som bindningsenergin, som bestäms av bredden på det supraledande bandgapet på ca 10^{-3} eV. Uppskatta avståndet mellan elektronerna. [5 p]

Lösning:

Vi inser att energierna inte ger upphov till relativistiska effekter. Identifiera $\Delta E_k = E_b = 10^{-3}$ eV och $E_k = 10$ eV. Cooperparets avstånd kan uppskattas som osäkerheten i position Δx . Man kan använda vilken av Heisenbergs osäkerhetsrelationer man vill. Här exemplifierar vi med $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$.

Följande relationer kommer användas: $E_k = p^2/2m$ och $p = \sqrt{2mE_k}$. Osäkerheten i kinetisk energi kan relateras till osäkerheten i rörelsemängd genom differentiering:

$$\Delta E_k = \Delta \left(\frac{p^2}{2m} \right) = \frac{2p\Delta p}{2m} = \frac{p\Delta p}{m}$$

$$\Delta p = \frac{m\Delta E_k}{p} = \frac{m\Delta E_k}{\sqrt{2mE_k}} = \sqrt{\frac{m}{2E_k}} E_b$$

Detta leder till att gränsen för osäkerheten i position blir:

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2\Delta p} = \frac{\hbar}{E_b} \sqrt{\frac{E_k}{2m}} = 6.2 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0.62 \text{ } \mu\text{m}$$

5. Problem:

I s.k. *lättevattenreaktorer*, den typ av kärnreaktorer som vi använder för elproduktion i Sverige, så används vanligt vatten både för kylning av reaktorhärden och för moderering (nedbromsning) av de snabba neutronerna. Vid normaldrift så finns i vattnet ett högt flöde (ca 10^{14} neutroner [$\text{s}^{-1}\text{cm}^{-2}$]) av termiska neutroner. Medelenergin för en termisk neutron är 0.025 eV. En vanlig process i vattnet är att en vätekärna i en vattenmolekyl absorberar en neutron och bildar en ny isotop.

a) Skriv beteckningen för denna nya isotop på formen ${}^AX$, där A är masstalet och X är grundämnesbeteckningen. [1 p]

b) Den nya isotopen har endast ett stabilt kvanttillstånd (som således är dess grundtillstånd). Energivinsten (Q -värdet) vid absorption av den termiska neutronen emitteras i form av en gammafoton. Använd relevant data (såsom massor och/eller energier) och beräkna, med två värdesiffror, energin för gammafotonen. [4 p]

Lösning:

a) Vätets atomkärna är bara en proton, och isotopen kan skrivas ${}^1\text{H}$. Vid absorption av en neutron så bildas isotopen ${}^2\text{H}$, dvs deuterium.

b) För att hitta Q -värdet så kan vi jämföra skillanden i massa före och efter reaktionen:

$$Q = [(m(p) + m(n)) - m(\text{deuteron})] c^2 = 2.225 \text{ [MeV]}.$$

Man kan också använda atomära massor (för ${}^1\text{H}$ and ${}^2\text{H}$), och det ger samma resultat förutsatt att man inte gör misstag med antalet elektroner. Resultatet ger avrundat ett Q -värde på 2.2 MeV. Detta är alltså energin som gammafotonen får. Vi kan notera att den lilla termiska energin som neutronerna har (0.025 eV) är helt försumbar i detta sammanhang.

6. Problem:

a) Ta fram det generella uttrycket för $\Delta E(J)$, dvs energiskillnaden mellan två på varandra följande rotationsnivåer för en roterande molekyl. [1 p]

b) Kolmonoxidmolekylen, CO, kan exciteras genom rotation. De två vanligast förekommande isotoperna för kol och syre är ${}^{12}\text{C}$ respektive ${}^{16}\text{O}$. Astronomen Josefin studerar absorptionsspektrumet för kolmonoxid i ljuset från en avlägsen nebulosa. En tydlig absorptionslinje syns vid frekvensen $0.115 \cdot 10^{12}$ Hz, och Josefin vet att denna linje motsvarar övergången $J = 0 \rightarrow J = 1$. Hon observerar också en mycket svagare linje vid $0.110 \cdot 10^{12}$ Hz, och Josefin undrar om detta kan bero på att en annan kolisotop än ${}^{12}\text{C}$ finns i nebulosan. Bestäm vilken isotop (på formen ${}^AX$) det är. [4 p]

Lösning:

a) Rotationsenergierna för en molekyl skrivs på följande form: $E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$.

Vi jämför nivåerna J och $J + 1$ och får skillnaden:

$$\Delta E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} (J+1)((J+1)+1) - \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) = \frac{\hbar^2}{2I} (2J+2) = \frac{\hbar^2}{I} (J+1).$$

b) Om vi sätter $J = 0$ i uttrycket ovan för ΔE_{rot} så får vi energiskillnaden mellan $J = 0$ och $J = 1$. Vi får då: $\Delta E_{\text{rot}}(J = 0) = \frac{\hbar^2}{I}$. Denna energi (skillnad) ska motsvara fotonenergin $h\nu$ som emitteras, där vi enligt uppgiften har $\nu_1 = 0.115 \cdot 10^{12}$ Hz och $\nu_2 = 0.110 \cdot 10^{12}$ Hz.

Vidare så noterar vi att tröghetsmomentet, $I = \mu R^2$, beror av molekylens två massor: $I = M_O R_O^2 + M_C R_C^2 = \mu R^2$, där $\mu = \frac{M_O M_C}{M_O + M_C}$ är den reducerade massan och $R = R_O + R_C$ är avståndet mellan de två atomkärnorna (C och O). I det fall då vi har ${}^{12}\text{C}$ och ${}^{16}\text{O}$ så får vi en reducerad massa på formen $\mu_1 = k \frac{16 \cdot 12}{16+12}$. I det fallet då vi har den okända kolisotopen så får vi istället: $\mu_2 = k \frac{16 \cdot A}{16+A}$, där A är masstalet för den okända isotopen. Vi försummar här de relativt små skillnaderna i massa som vi får pga kärnornas varierande bindningsenergi. Vi antar vidare att skillnaden i kolisotop inte påverkar avståndet R mellan de två atomkärnorna.

Vi kan nu skriva upp bråket mellan de två energierna:

$$\frac{0.115}{0.110} = \frac{h\nu_1}{h\nu_2} = \frac{\Delta E_{\text{rot1}}}{\Delta E_{\text{rot2}}} = \frac{\frac{\hbar^2}{I_1}}{\frac{\hbar^2}{I_2}} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{16 \cdot A}{16+A}}{\frac{16 \cdot 12}{16+12}}$$

Vi löser ut masstalet A ur ovanstående ekvation och får då:

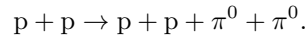
$$A = \frac{16}{\frac{0.110}{0.115} \cdot \frac{28}{12} - 1} = 12.988.$$

Detta resultat är mycket nära heltalet 13.

Svaret är att den okända isotopen av kol är ^{13}C .

7. Problem:

Neutrala pimesoner, π^0 , kan skapas på olika sätt. En möjlig reaktion för produktion av två π^0 -partiklar per kollision är:



I ett acceleratorlaboratorium så låter man en högenergetisk stråle av protoner träffa stillastående protoner. Beräkna protonstrålens lägsta kinetiska energi (i labsystemet), för vilken reaktionen ovan är möjlig. [5 p]

Lösning:

(Under tentamen så informerades studenterna om värdet på π^0 -partikelns massa, som är $134,9766 \text{ MeV}/c^2$.)

Problemet kan lösas på flera sätt. Här börjar vi med ett tänka oss två olika inertialsystem.

En observatör i det första systemet, labsystemet S , ser den inkommande protonen (i acceleratorstrålen) med hastighet u , total energi E , kinetisk energi E_k , och rörelsemängd p . Protonen i strålmålet är i vila och har således totalenergin lika med $m_p c^2$, där m_p är protonens vilomassa.

Det andra inertialsystemet S_{cm} rör sig med den gemensamma tyngdpunkten för de två protonerna före reaktionen. Från en observatör i S_{cm} , placerad i tyngdpunkten, så kommer protonerna inflygande från två motsatta håll, med samma hastighet. Den totala rörelsemängden i detta system är lika med 0, och rörelsemängden bevaras förstås i reaktionen. Var och en av de två protonerna har hastigheten u' , rörelsemängden p' , energin E' och kinetiska energin E'_k .

Den summerade kinetiska energin för de två protonerna är $2E'_k$ i systemet S_{cm} . Denna kinetiska energi är precis tillräcklig för att två π^0 -partiklar skapas i kollisionen. Efter kollisionen, betraktad från S_{cm} , så befinner sig de fyra partiklarna (p, p, π^0, π^0) i vila i den stillastående tyngdpunkten.

Vi börjar med att räkna ut E' i S_{cm} , genom att likställa den totala relativistiska energin (för alla partiklar) före och efter kollisionen.

$$\begin{aligned} 2E' &= (2m_p + 2m_{\pi^0})c^2 \\ E' &= (m_p + m_{\pi^0})c^2 = 938.280 + 134.9766 = 1073 \text{ [MeV]}. \end{aligned}$$

Här är m_p och m_{π^0} vilomassorna för protonen och π^0 -partikeln. Vi ser också att den kinetiska energin, E'_k , för en av protonerna (i S_{cm}) är $E'_k = E' - m_p c^2 = m_{\pi^0} c^2 = 134.9766 \text{ [MeV]}$. Man kan egentligen inse detta direkt, eftersom det ju är protonernas kinetiska energi som precis går åt för att skapa pi-mesonerna.

Vi kan också från ovanstående skriva

$$\gamma_{u'} m_p c^2 = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = (m_p + m_{\pi^0})c^2,$$

och räkna ut protonens hastighet, u' , (och gamma-faktor, $\gamma_{u'}$) i S' :

$$\begin{aligned} u' &= c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_p}{m_p + m_{\pi^0}} \right)^2} = 0.48529 c \\ \gamma_{u'} &= 1.1437. \end{aligned}$$

Nu återstår att från ovanstående beräkna E_k , dvs den inkommande protonens kinetiska energi i labsystemet S. Det kan göras genom att använda en hastighets-transformation. Vi betecknar hastigheten som S' rör sig i förhållande till S som v . Hastighetstransformationen (mellan S och S') för den inkommande protonen kan då skrivas:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'}.$$

Låt oss betrakta protonen i strålmålet. Den är stillstående i S. Men i S' rör den sig (just denna proton rör sig i negativ x-riktning) med hastigheten u' mot en observatör i tyngdpunkten. Och vi inser nu att denna hastighet är densamma som en stillastående observatör i S' rör sig i förhållande till en stillastående observatör i S. Således kan vi för den inkommande protonen skriva $u' = v$, och vi får:

$$\begin{aligned} u &= \frac{2u'}{1 + \frac{u'^2}{c^2}} = 0.78557c \\ \gamma_u &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 1.6161. \end{aligned}$$

Och slutligen kan vi räkna ut E_k :

$$E_k = E - m_p c^2 = m_p c^2 (\gamma_u - 1) = 938.280 \cdot (1.6161 - 1) = 578.08 \text{ [MeV]}.$$

Med lite algebra så kan vi om vi vill skriva om det sista ledet som en funktion av massorna:

$$E_k = 2 \cdot m_p c^2 \left[2 \left(\frac{m_\pi}{m_p} \right) + \left(\frac{m_\pi}{m_\pi} \right)^2 \right].$$

Vi ser att det krävs en kinetisk protonenergi på 578 MeV för att reaktionen ska vara möjlig.

Alternativ metod:

Här nedan visar vi en alternativ metod som är vanligt förekommande i litteraturen.

Det generella uttrycket $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$ kan skrivas $E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$. Eftersom $m_0^2 c^4$ har samma värde, oavsett inertialsystem, så är uttrycket $E^2 - p^2 c^2$, invariant, dvs detsamma vid byte av inertialsystem.

Vi kan nu ställa upp ekvationen:

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}^2 - p^2 c^2 &= (m_p c^2 + E)^2 - p^2 c^2 = E_{\text{tot}}'^2 - 0 \cdot c^2 = ((2m_p + 2m_\pi)c^2)^2 \quad (1) \\ (m_p c^2 + E)^2 - p^2 c^2 &= ((2m_p + 2m_\pi)c^2)^2. \quad (2) \end{aligned}$$

Här är E_{tot} den sammanlagda relativistiska energin i labsystemet, E är den inkommande protonens energi i labsystemet, och p den relativistiska rörelsemängden (för den inkommande protonen) i labsystemet. Vi har också E_{tot}' , den sammanlagda relativistiska energin i tyngdpunktssystemet S' .

För den inkommande protonen så har vi:

$$p^2 c^2 = E^2 - (m_p c^2)^2$$

Vi sätter in det i ekvationen 2 ovan och får då:

$$\begin{aligned} (m_p c^2 + E)^2 - (E^2 - (m_p c^2)^2) &= ((2m_p + 2m_\pi)c^2)^2 \\ (m_p c^2)^2 + 2Em_p c^2 + (m_p c^2)^2 &= ((2m_p + 2m_\pi)c^2)^2 \\ Em_p c^2 + (m_p c^2)^2 &= 2(m_p + m_\pi)^2 c^4. \end{aligned}$$

Vi får nu den totala relativistiska energin för den inkommande protonen i S:

$$E = \frac{2(m_p + m_\pi)^2 c^4 - (m_p c^2)^2}{m_p c^2} = 2 \left(\frac{(m_p + m_\pi)^2}{m_p} \right) c^2 - m_p c^2.$$

till slut så får vi den kinetiska energin för den inkommande protonen i S genom att subtrahera viloenenergin:

$$\begin{aligned} E_k &= E - m_p c^2 = 2 \left(\frac{(m_p + m_\pi)^2}{m_p} \right) c^2 - 2m_p c^2 \\ E_k &= 2m_p c^2 \left[1 + 2 \left(\frac{m_\pi}{m_p} \right) + \left(\frac{m_\pi}{m_p} \right)^2 - 1 \right] \\ E_k &= 2m_p c^2 \left[2 \left(\frac{m_\pi}{m_p} \right) + \left(\frac{m_\pi}{m_p} \right)^2 \right] \\ E_k &= 2 \cdot 938.280 [\text{MeV}] \left[2 \left(\frac{134.9766}{938.280} \right) + \left(\frac{134.9766}{938.280} \right)^2 \right] = \\ &= 2 \cdot 938.280 \cdot 0.30805 = 578.08 [\text{MeV}]. \end{aligned}$$

Vi ser att en kinetisk energi på strax över 578 MeV räcker för att skapa två pimesoner i reaktionen. Svaret överensstämmer som väntat med resultatet från metoden med hastighetstransformationer.

8. Problem:

Americiumisotopen ^{241}Am sönderfaller med α -sönderfall. Dotterkärnan populeras då i ett exciterat tillstånd.

a) Vilken är denna dotterkärna? [1 p]

(Ange masstal, A , och grundämne X , på formen $^A X$.)

Då dotterkärnan de-exciteras till grundtillståndet så emitteras en gammafoton med energin 60 keV. Fotonen träffar en guldfolie och sprids där mot en elektron medelst Comptonspridning.

b) Ange för vilken spridningsvinkel, θ , som den spridda fotonen får den lägsta möjliga energin och beräkna den fotonenergin. [4 p]

Några relevanta atomnummer (protontal) för grundämnena kring americium är:
U:92, Np:93, Pu:94, Am:95, Cm:96, Bk:97, Cf:98.

Lösning:

a) För ^{241}Am så har vi $A = 241$, $Z = 95$, $N = 241 - 95 = 146$. Vid alfasönderfall så lämnar en alfapartikel, dvs två protoner och två neutroner, den stora kärnan. För dotterkärnan så får vi då: $A = 241 - 4 = 237$, $Z = 95 - 2 = 93$. Dotterkärnan är alltså ^{237}Np .

b) För Comptonspridningen av fotonen på 60 keV så har vi följande uttryck.

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1 - \cos\theta}{m_e c^2}.$$

Här så är $E = 60 [\text{keV}]$ den inkommande fotonens energi, och E' den utgående fotonens energi som vi söker. vi får:

$$E' = \frac{1}{\frac{1 - \cos\theta}{m_e c^2} + \frac{1}{E}} = \frac{1}{\frac{1 - \cos\theta}{511 [\text{keV}]} + \frac{1}{60 [\text{keV}]}}.$$

Det minsta värdet på E' får för maximalt värde på $1 - \cos\theta$, dvs för minimalt värde på $\cos\theta$, dvs för $\theta = 180^\circ$, då $\cos\theta = -1$. Vi får då:

$$E'(\theta = 180^\circ) = \frac{1}{\frac{1 - (-1)}{511 [\text{keV}]} + \frac{1}{60 [\text{keV}]}} = \frac{1}{\frac{2}{511} + \frac{1}{60}} [\text{keV}] = 48.59 [\text{keV}].$$

Vi ser att vid $\theta = 180^\circ$ så får vi den minimala fotonenergin på ca 49 [keV]. Denna vinkel motsvarar *bakåtspridning*, dvs den spridda fotonen går tillbaka i riktningen som den inkommande fotonen kom ifrån.